# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Noviembre 2008**

---

**Problema 1** Determinar la matriz $X$ que verifica la ecuación $A^2X - B = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

(Extremadura (Junio 2006))

**Solución**

$$A^2X - B = AX \Longrightarrow A^2X - AX = B \Longrightarrow X = (A^2 - A)^{-1}B$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** Encuentra el valor de $a$ que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja (Junio 2006))

**Solución**

$$|A| = 6 - a = 0 \Longrightarrow a = 6$$

Para $a = 6$ la matriz $A$ no tiene inversa.

**Problema 3** Considere el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro $m$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z = & 1 \\ x- & & z = & 1 \\ 2x+ & 2y+ & (m+1)z = & 0 \end{array}\right.$$

Discútalo y, además resuélvalo para los valores de $m$ que lo hacen compatible

(Islas Baleares (Junio 2006))

**Solución**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & 0 \end{array}\right), \quad |A| = -2(m+1) = 0 \Longrightarrow m = -1$$

- Si $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

  Resolvemos por Cramer:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & m+1 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = 1,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = -1$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2(m+1)} = 0$$

- Si $m = -1$:

  $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  Se observa que la tercera fila se obtiene de restar las dos primeras, por lo que se puede afirmar que se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

  $$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z = & 1 \\ x- & z = & & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

**Problema 4** Tres hermanos quieren reunir 26 euros para comprar un regalo a sus padres. Después de una larga discusión han decidido que el mediano debe poner el doble que el pequeño y el mayor debe poner dos terceras partes de lo que ponga el mediano, ¿Cuánto debe poner cada uno?

(La Rioja (Junio 2006))

**Solución**

Sea $x$ euros del pequeño, $y$ euros del mediano y $z$ euros del mayor.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ y=2x \\ z=2y/3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=6 \\ y=12 \\ z=8 \end{array}\right.$$