Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Noviembre 2008

Problema 1 Una aseguradora tiene tres tarifas: una para adultos, otra para niños y otra para ancianos. Se sabe que una familia de 3 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 215 euros, una segunda familia de 4 adultos, 1 niño y 2 ancianos paga 260 euros, una tercera familia de 2 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 190 euros.

1. ¿Cuánto paga cada niño, adulto y anciano?
2. ¿Cuánto pagará una familia de 5 adultos, 3 niños y 2 ancianos?

(Islas Canarias (Junio 2006))

Solución

1. Sea x tarifa de adulto, y tarifa de niño y z tarifa de anciano.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 215 \\ 4x + y + 2z = 260 \\ 2x + 2y + z = 190 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 25 \\ y = 40 \\ z = 60 \end{cases}$$

2. $5x + 3y + 2z = 125 + 120 + 120 = 365$ euros.

Problema 2 Resolver:

1. Discute el sistema siguiente según los valores del parámetro a

$$\begin{cases} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{cases}$$

2. Resuélvelo para el valor de a que lo hagan indeterminado.

(Barcelona (Junio 2006))

Solución

- 1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array} \right), \quad |A| = -a^2 - a + 2 = 0 \implies a = 1, \quad a = -2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} \right) |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) = 1$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -6 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right) F_2 = -2F_1 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 1 = \text{Rango}(A) <$$

N° de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

$$2. \text{ Si } a = -2 \implies x - y = 1 \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $AA^T - 5A^{-1}$, siendo A^T y A^{-1} las matrices transpuesta e inversa, respectivamente.

(Comunidad Valenciana (Junio 2006))

Solución

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T - 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Encontrar todas las matrices X cuadradas de orden 2 que satisfacen la igualdad $AX = XA$ en cada uno de los siguientes casos:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid (Junio 2006))

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b = 3b \implies b = 0 \\ 3c = c \implies c = 0 \\ a = a \implies a \text{ cualquiera} \\ 3d = 3d \implies d \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c = 3b \\ d = a \implies c = 0 \\ 3a = 3d \implies a = d \\ 3b = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$