

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Noviembre 2008

Problema 1 Se tienen 9,50 euros en monedas de 5 céntimos, de 10 céntimos y de 50 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos excede en 9 unidades el número de monedas de 50 céntimos y cada 3 monedas de 10 céntimos se tienen 4 de 5 céntimos.

(Islas Baleares (Junio 2006))

Solución

Sea x n° monedas de 5 céntimos, y n° monedas de 10 céntimos y z n° monedas de 50 céntimos.

$$\begin{cases} 5x + 10y + 50z = 950 \\ y = z + 9 \\ 3x = 4y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \\ z = 12 \end{cases}$$

Problema 2 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a .
2. Resolver el sistema para $a = 4$

(Madrid (Junio 2006))

Solución

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array} \right), \quad |A| = 8a + 14 = 0 \implies a = -\frac{7}{4}$$

Si $a \neq -7/4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado.

Si $a = -7/4$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array} \right) \quad |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{array} \right| = 8 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 46 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

2.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

1. Determine la matriz inversa de A .

2. Halle los valores x, y y z para los que $AX = Y$

(Andalucía (Junio 2006))

Solución

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $AX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - 2y - 2 = -x \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 4 Encontrar una matriz X que verifique la igualdad $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Verifica también la matriz X la igualdad $XA = B$?

(Navarra (Junio 2006))

Solución

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ya que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$XA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \neq B$$