Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2008

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 3 & -m & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 3 & -m & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 6m + 7 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -7$$

Si $m = 1$ o $m = -7 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -7 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & -3/7 & 4/7 \\ 5/7 & 4/7 & -3/7 \\ 3/7 & 8/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular $A^{1000} - A^{900}$

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} - A^{900} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1000 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 900 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4 calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ c+d & -d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = a+b \Longrightarrow b = 0 \\ b = -b \Longrightarrow b = 0 \\ a-c = c+d \Longrightarrow a = 2c+d \\ b-d = -d \Longrightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

LLamamos $X = \begin{pmatrix} 2c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$