Examen de Matemáticas II (Junio 2009)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

1. (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.
2. (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.
3. (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

1. Tres pasos:
   - Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0,0,0)$:
   $$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$
   - Calculo el punto de corte Q de π con r:
   $$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Longrightarrow Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$
   - P es el punto simétrico de O respecto de Q:
   $$\frac{P+O}{2} = Q \Longrightarrow P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$
2. $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$
3. Si $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow A(4,0,0)$
   Si $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow B(0,4/3,0)$
   Si $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C(0,0,4)$

$$\overrightarrow{OA} = (4,0,0),\ \overrightarrow{OB} = (0,4/3,0),\ \overrightarrow{OC} = (0,0,4)$$
$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right| = \frac{32}{9}\ u^3$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right.$$

, Se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
2. (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right) \quad |A| = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \;\; \lambda = 1 \;\; \lambda = \frac{1}{5}$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ y $k \neq 1/5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) =$ $3 =$n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

  Como$|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

  Como

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right| = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Luego el sistema es incompatible.

- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 1/5$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x- & 4y+ & 2z = & -2 \\ -x+ & y+ & z = & -1 \\ -4x- & 4y- & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x+1) \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2 \, e^{-t} \, dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$\left(u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt; \quad dv = e^{-t} \, dt \Longrightarrow v = -e^{-t} \right)$$

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} + 2\int te^{-t}\, dt =$$

$$\left(u = t \Longrightarrow du = dt; \quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$= -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right] = -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t} - e^{-t}\right] = -e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right)\Big]_0^x = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2009) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
2. (1 punto). Determinar la distancia entre las rectas r y s.
3. (1 punto). Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Solución:

1.

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array}\right., \quad s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(-2,0,2) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array}\right.$$

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 2z - 1 = 0$$

2. $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-2,2)$:

$$\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right| = |\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}| = |-14| = 14$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(2, 0, -4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}\ u$$

3.

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2, 3, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(-2, 0, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_s} = (-2, 0, 2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$$

Obtener:

1. (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
2. (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
3. (1 punto). La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

1.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

2. En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x - 4)(x - 1)^2$$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

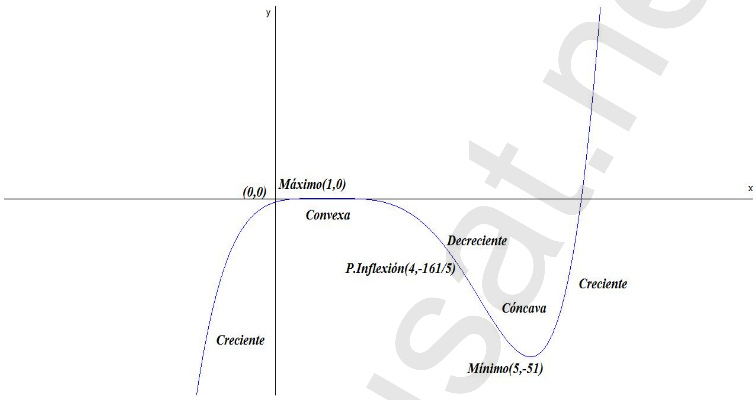
	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

3.

$$f(x) = \int \left[x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5\right]\, dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$



Problema 3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

2. (0,5 punto). Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \;\; \lambda = 6$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado.

2. Cuando $\lambda = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -14 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right)$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.
2. (1 punto). Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

1. $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \;\; a = -2$

   Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3.$

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

2. Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$