Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Enero 2009

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & 2y+ & z= & 4 \\ 2x+ & my- & mz= & 2 \\ mx- & y- & 2z= & -2 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geométricamente.
2. Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & 2 & 1 & 4 \\ 2 & m & -m & 2 \\ m & -1 & -2 & -2 \end{array}\right), \quad |A|=-6m^2+6=0 \quad m=1, \ m=-1$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

Como

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{array}\right|=-12 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{\text{A}})=3$$

Luego Rango$(\overline{A})\neq$ Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución) En este caso los tres planos se cortan dos a dos, pero sin soluciones comunes.

$$\pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{-1}{2}\neq\frac{2}{-1} \Longrightarrow \text{Se cortan}$$
$$\pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{-1} \Longrightarrow \text{Se cortan}$$
$$\pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{2}{-1}\neq\frac{-1}{-1} \Longrightarrow \text{Se cortan}$$

$m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 - F_1$, luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n° de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

2. Si $m=1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z= & 4\\ 2x+ & y- & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} x= & \lambda\\ y=2- & \lambda\\ z= & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & a\\ 3 & -a & 2\\ 2 & -3 & a \end{array}\right)$ Calcular los valores que debe tomar el parámetro a de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m=0$.

Solución:

$|A| = a^2 - 15a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ \ a = 14$.

Si $a \neq 1$ y $a \neq 14 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $a = 1$ o $a = 14 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}

Si $a=0$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 3/7 & 0 & 2/7\\ 2/7 & 0 & -1/7\\ -9/14 & 1/2 & -3/7 \end{array}\right)$$

Problema 3 Hállense las matrices X cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$\left(\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)\cdot X = X \cdot \left(\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} -a+c & -b+d\\ c & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -a & a+b\\ -c & c+d \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c} -a+c=-a \\ -b+d=a+b \\ c=-c \\ d=c+d \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=0 \\ d=a+2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a+2b \end{array}\right)$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$XA+B=X-C$$

donde $A=\left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$.

Solución:

$$XA+B=X-C \Longrightarrow X=-(A-I)^{-1}(C+B)$$

$$A-I=\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(A-I)^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{array}\right); \quad C+B=\left(\begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$X=-\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -5 & 5 \\ -8 & 6 \end{array}\right)$$

Problema 5 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccc} x+2 & x-1 & x+1 \\ 2x & -x & x \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{array}\right|=0$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc} x+2 & x-1 & x+1 \\ 2x & -x & x \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{array}\right|=x\left(\left|\begin{array}{ccc} x & x & x \\ 2 & -1 & 1 \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{array}\right|+\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x^2-1 & x-1 & x-1 \end{array}\right|\right)=$$

$$x^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{array}\right|=\left[\begin{array}{c} C_1 \\ C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{array}\right]=x^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ x+1 & -x & -x \end{array}\right|=$$

$$x^2(x-1)\left|\begin{array}{cc} -3 & -1 \\ -x & -x \end{array}\right|=2x^3(x-1)=0 \Longrightarrow x=1, \quad x=0$$