Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2008

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my- & z= & 1 \\ -x+ & my+ & 2z= & -2 \\ mx+ & 2y+ & z= & -m \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de m e interpretarlo geométricamente.
2. Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & m & -1 & 1 \\ -1 & m & 2 & -2 \\ m & 2 & 1 & -m \end{array}\right), \quad |A|=3(m^2+m-2)=0 \quad m=1, \ m=-2$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. Los tres planos se cortan en un punto, el sistema tiene solución única.

Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right|=-4\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

Como

$$\left|\begin{array}{rrr} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right|=18 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{\text{A}})=3$$

Luego *Rango*$(\overline{A})\neq$ Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución) En este caso los tres planos se cortan dos a dos, pero sin soluciones comunes.

$$\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{2}{-1}\neq\frac{-2}{-2} \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{2}{-2}\neq\frac{-2}{2} \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{-1}{-2}\neq\frac{-2}{2} \Longrightarrow \text{Se cortan} \end{array}$$

$m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Se observa que la tercera fila $F_3 = F_2 + F_1$, luego $\text{Rango}(A) = 2\text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones y los tres planos se cortan en una recta.

2. Si $m = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & z = & 1 \\ -x+ & y+ & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = 1+ & \lambda \\ y = -1- & \lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} m & 2 & 2 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & m & 3 \end{array}\right)$ Calcular los valores que debe tomar el parámetro m de manera que A sea inversible. Calcular, si es posible, la inversa de esta matriz para $m = 0$.

Solución:

$\||A| = m^2 - 9m + 8 = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = 8$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq 8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $m = 1$ o $m = 8 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}

Si $m = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} -3/8 & -3/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \cdot A$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} a+b & b \\ c+d & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ a+c & b+d \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a=d \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ c & a \end{array}\right)$$

Problema 4 Resolver la ecuación matricial

$$AX - I = BX - C$$

donde $A = \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$ y $C = \left(\begin{array}{rr} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$.

Solución:

$$AX - I = BX - C \Longrightarrow X = (A-B)^{-1}(I-C)$$

$$A - B = \left(\begin{array}{rr} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(A-B)^{-1} = \left(\begin{array}{rr} 1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -3/5 \end{array}\right); \quad I - C = \left(\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = \left(\begin{array}{rr} 1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -3/5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} -3/5 & -4/5 \\ -2/5 & -1/5 \end{array}\right)$$