

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Mayo 2008

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$$

Se pide:

1. Dominio
2. Puntos de corte
3. Simetrías
4. Tipos de discontinuidad y Asíntotas
5. Monotonía y extremos
6. Curvatura y puntos de Inflexión
7. Representación aproximada
8. La recta tangente y la normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$

Solución:

1. $Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2. Con el eje OY : $x = 0 \implies (0, 0)$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \implies (0, 0)$, en $x = 1$ no hay punto de corte ya que se anula el denominador. El único punto de corte es el $(0, 0)$

3. No hay simetría
4.
 - Verticales: Las únicas posibles son: $x = 1$ y $x = -1$

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

En este punto hay una discontinuidad evitable, un agujero. No hay asíntota.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

En este punto hay una discontinuidad no evitable, un salto. Si hay asíntota.

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-x)}{x^2-1} = \infty$$

No hay asíntota.

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-x)}{x^3-x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(1-x)}{x^2-1} + x \right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = -x + 1$

5.

$$f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \implies x = 0, x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decrece	Crece	Decrece

Creciente: $(-2, -1) \cup (-1, 0)$

Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

Hay un Mínimo relativo en $(-2, 4)$ y un Máximo relativo en $(0, 0)$

6.

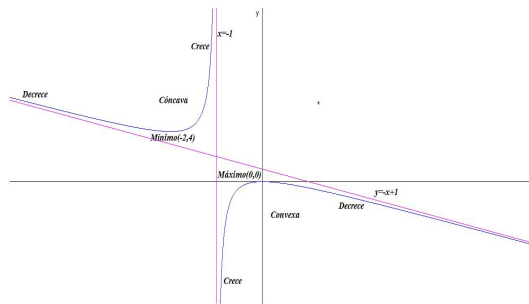
$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \neq 0 \implies \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, -1)$

Convexa: $(-1, 1) \cup (1, \infty)$

7.



8.

$$f(2) = -\frac{4}{3}, \quad f'(2) = m = -\frac{8}{9}$$

$$\text{Recta tangente: } y + \frac{4}{3} = -\frac{8}{9}(x - 2) \quad \text{Recta normal: } y + \frac{4}{3} = \frac{9}{8}(x - 2)$$