

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Noviembre 2007

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ (1+a)y + z = 4 \\ x + 2y + az = 4 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de a e interpretarlo geoméricamente.
- b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Castilla-León (Junio 2006)

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 1 & 4 \\ 1 & 2 & a & 4 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \quad a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible.

Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible.

b) Si $a = 2$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \quad 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 2 Una mujer ha obtenido 4500 euros de beneficio por invertir un total de 60000 euros en tres empresas: α , β y γ . Se sabe que el dinero invertido en la empresa α fué M veces la suma de las cantidades invertidas en las empresas β y γ , y que los beneficios de la inversión fueron del 5 % en la empresa α , 10 % en la empresa β y 20 % en la empresa γ

- Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita calcular la inversión realizada por la mujer en cada empresa.
- Prueba que para $M > 0$ el sistema es compatible determinado
- Calcula la solución para $M = 2$.

Cantabria (Junio 2006)

Solución:

x euros invertidos en la empresa α
 y euros invertidos en la empresa β
 z euros invertidos en la empresa γ .

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 60000 \\ x = M(y + z) \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z = 4500 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 60000 \\ x - My - Mz = 0 \\ x + 2y + 4z = 90000 \end{cases}$$

b)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 1 & -M & -M & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 90000 \end{array} \right) \implies |A| = -2M - 2 = 0 \implies M = -1$$

Si $M \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $M = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} x+ & y+ & z & 60000 \\ x+ & y+ & z & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z & 90000 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 60000 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 90000 \end{vmatrix} = 60000 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible. Y por tanto, cuando $M > 0$ el sistema será Compatible Determinado.

c) Si $M = 2$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 60000 \\ x- & 2y- & 2z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 4z = & 90000 \end{cases} \begin{cases} x = 40000 \\ y = 15000 \\ z = 5000 \end{cases}$$

Problema 3 Hállense las matrices A cuadradas de orden dos, que verifican la igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Castilla-León (Junio 2006)

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases} \implies \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$