

## Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Noviembre 2006

---

**Problema 1** Con 450 grm de un medicamento se fabricaron 60 pastillas de tres tipos: grandes, medianas y pequeñas. Las pastillas grandes pesan 20 grm, las medianas 10 grm y las pequeñas 5 grm. Si el total de pastillas grandes y medianas es la mitad de las pastillas pequeñas ¿cuántas se fabricaron de cada tipo?

**Solución:**

$x$  n° de pastillas grandes.

$y$  n° de pastillas medianas.

$z$  n° de pastillas pequeñas.

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 20x + 10y + 5z = 450 \\ x + y = \frac{z}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 60 \\ 20x + 10y + 5z = 450 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \\ z = 40 \end{cases}$$

**Problema 2** Dado el sistema

$$\begin{cases} mx - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ x - 5y + 3z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de  $m$ .
- b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

**Solución:**

a)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} m & -1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{array} \right) \implies |A| = 3 - 3m = 0 \implies m = 1$$

Si  $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$  de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si  $m = 1$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

Como  $|A| = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ .

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$ .

Luego  $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$  de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 3** Encontrar todas las matrices  $X$  no nulas que verifican  $X \cdot A = A \cdot X$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ c+d & 2d \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{cases} a = a+b & b = 0 \\ b = 2b & b = 0 \\ a+2c = c+d & a = d-c \\ b+2d = 2d & b = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$