

**Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007)**  
**Selectividad-Opción A**

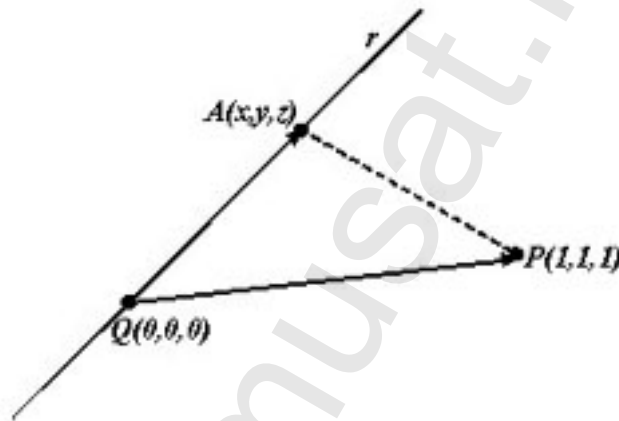
**Tiempo: 90 minutos**

---

---

**Problema 1** (2 puntos) Se considera la recta  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$  y el punto  $P(1, 1, 1)$ . Dado el punto  $Q(0, 0, 0)$  de  $r$ , hallar todos los puntos  $A$  contenidos en  $r$  tales que el triángulo de vértices  $A$ ,  $P$  y  $Q$  tenga área 1.

**Solución:**



Un punto  $A(x, y, z)$  de la recta sería

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \implies A(\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2\lambda, -2\lambda, 0)| = \sqrt{2\lambda^2} = 1$$

$$\text{Luego: } \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \implies A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Problema 2** (2 puntos)

- a) (1,5 puntos). Calcula la ecuación general de un plano  $\pi_1$  que contiene a la recta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano  $\pi_2 : 2x + y - z = 2$ .

- b) (0,5 puntos). Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

**Solución:**

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \quad \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_{\pi_2} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x-y+z-2=0$$

b)

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 3** (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

- a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de  $k$ .  
 b) (1 punto) Resolverlo para  $k = -1$ .

**Solución:**

a)

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array} \right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \implies k = 0, \quad k = -1$$

Si  $k \neq 0$  y  $k \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$  de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si  $k = 0$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El  $\text{Rango}(A) = 1$ , dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2$ . Por tanto,  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$  Sistema Incompatible (No tiene Solución). Si  $k = -1$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$  incógnitas  $\implies$  Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 4** (3 puntos)

a) (1 puntos) Si  $f$  es una función continua, obtener  $F'(x)$  siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

b) (2 punto) Si  $f(1) = 1$  y además  $\int_0^1 f(t)dt = 1$ , hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $F(x)$  en el punto  $(1, F(1))$ .

**Solución:**

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si  $f$  es una función integrable si

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$$

Luego  $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \\ y - \frac{19}{4} &= 3(x - 1) \end{aligned}$$

**Examen de Matemáticas II (Coordinador 2007)**  
**Selectividad-Opción B**

**Tiempo: 90 minutos**

---

---

**Problema 1** (2 puntos). Dada la función  $f(x) = 6x^2 - x^3$ , se pide:

- a) (1 punto). Hallar un valor  $a > 0$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  sea paralela a la recta  $y = -15x$ .
- b) (1 punto). Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de  $f$  y la parte positiva del eje  $OX$ .

**Solución:**

- a) La pendiente de la recta tangente es  $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \implies m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \implies a = 5, \quad a = -1$$

Como  $a > 0 \implies$  la solución buscada es  $a = 5$  y, por tanto, como  $f(5) = 25 \implies (5, 25)$  es el punto buscado.

- b) Los puntos de corte con el eje  $OX$  son

$$6x^2 - x^3 = 0 \implies x = 0, \quad x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \left[ 2x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = 108 \text{ u}^2$$

**Problema 2** (2 puntos) Obtener el valor de  $k$  sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} (kx+5) \left( \frac{x+3}{x} - 1 \right) = 3k$$

Luego  $3k = 2 \implies k = \frac{2}{3}$ .

**Problema 3** (3 puntos) Se consideran el punto  $P(1, 0, 1)$  y la recta:

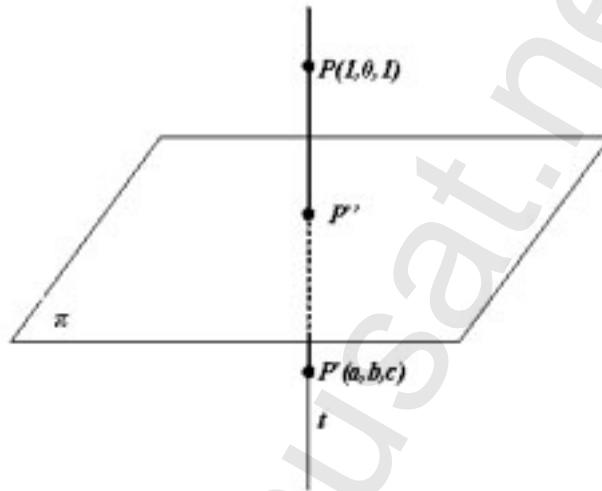
$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano  $\pi : x + y + z = 0$ . Se pide:

- a) (1,5 puntos). Obtener un punto  $P'$ , simétrico de  $P$  respecto del plano  $\pi$ .
- b) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta  $s$  que contiene al punto  $P$ , corta a la recta  $r$  y es paralela al plano  $\pi$ .

**Solución:**

- a) Sería el siguiente dibujo Calculamos primero el punto  $P''$  corte de la



recta  $t$  y el plano  $\pi$ , donde  $t$  es una recta perpendicular a  $\pi$  y que pasa por  $P$ .

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, 1) \\ P_t(1, 0, 1) \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{3} \implies P'' \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$P''$  es el punto medio entre  $P$  y  $P'$

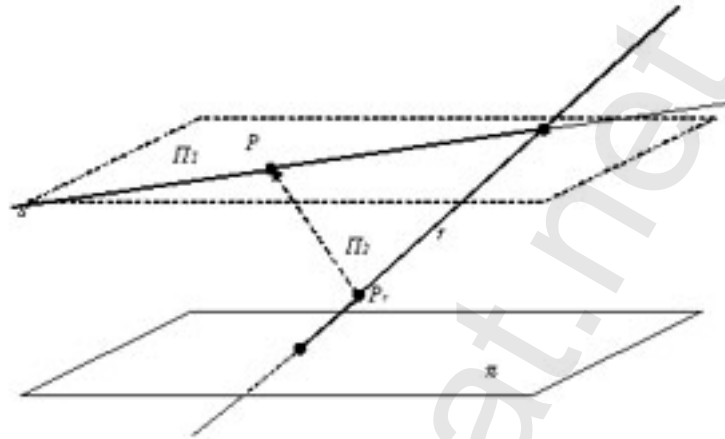
$$\left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left( \frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases} \implies P' \left( -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

- b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano  $\pi_1$  es paralelo a  $\pi$  y contiene a  $P$

El plano  $\pi_2$  contiene a  $P$  y a  $r$

Sería el siguiente dibujo



$$\pi_1 : x + y + z + \lambda = 0 \text{ y como contiene a } P \implies 1 + 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies \pi_1 : x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ \vec{PP}_r = (0, 0, -2) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - y - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 4** (3 puntos) Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,5 punto). Determinar el rango de  $M$  según los valores del parámetro  $\lambda$ .
- (1,5 punto). Determinar para qué valores de  $\lambda$  existe la matriz inversa de  $M$ . Calcular dicha inversa para  $\lambda = 0$ .

**Solución:**

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si  $\lambda \neq 1$  y  $\lambda \neq -2 \implies |M| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$ .

Si  $\lambda = 1$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el  $\text{Rango}(M) = 1$ .

Si  $\lambda = -2$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$ .

b) Si  $\lambda = 0$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$