

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Marzo 2006

Problema 1 Se pide:

1. Estudiar si los vectores $\vec{u}_1 = (a, 2a, -1)$, $\vec{u}_2 = (-a, 0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (-2, 4, a + 1)$, son linealmente independientes, según los diferentes valores del parámetro a .
2. ¿Cuándo $a = 0$ se podrá escribir \vec{u}_1 como combinación lineal de \vec{u}_2 y \vec{u}_3 ?

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} a & 2a & -1 \\ -a & 0 & 1 \\ -2 & 4 & a+1 \end{vmatrix} = 2a^3 + 2a^2 - 4a = 0 \implies a = 0 \quad a = -1 \quad \text{y} \quad a = 2$$

\vec{u}_1 , \vec{u}_2 y \vec{u}_3 son linealmente independientes si $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 2$.

2. Si $a = 0$: $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$

Problema 2 Dos submarinos se desplazan por el fondo del mar, y sus trayectorias vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Un barco destructor estudia las posibilidades más ventajosas para su ataque, por lo que, el capitán de este barco hace sus análisis matemáticos:

1. Estudia si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.
2. Calcula la distancia mínima entre ambas trayectorias.
3. Calcula la trayectoria en la que se encuentra esa distancia mínima.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (-1, 1, 1) \\ P_{r_1}(1, 1, 0) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 1) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, -1, 1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Se cruzan}$$

2.

$$|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}| = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = |(-1, 1, 2)| = \sqrt{6}$$

$$|[\vec{P}_{r_1} \vec{P}_{r_2}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}]| = |3| = 3$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

3. Como intersección de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 2) \\ \vec{u}_{r_1} = (1, -1, 2) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ -2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x+y-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 2) \\ \vec{u}_{r_2} = (1, 1, 0) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-y-z=0$$

$$t : \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Problema 3 Se pide:

- Hallar la ecuación de un plano determinado por los puntos $A(1, -2, 1)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 1, 0)$
- Estudia la posición relativa de la recta $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en el caso de que se corten.

Solución:

1.

$$\pi : \begin{cases} \vec{CA} = (1, -3, 1) \\ \vec{CB} = (2, -1, 1) \\ P(0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 2x-y-5z+1=0$$

- Sustituyendo en el plano $2(2+\lambda) - (\lambda) - 5\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 5/9$. Si sustituimos en la recta tenemos un punto de corte en el punto $(\frac{23}{9}, \frac{5}{9}, \frac{10}{9})$

Problema 4 Considera el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta r de ecuación $\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

1. Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
2. Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r .

Solución:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -3, 1) \\ P_r(1, -3, 0) \end{cases}$$

$$1. \overrightarrow{PP_r} = (0, -3, -1)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -3, 1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, -3, -1) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -3 & -3 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 6x + y - 3z - 3 = 0$$

2. Construimos un plano π_1 perpendicular a r que contenga a P :

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_{\pi_1} = (1, -3, 1) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies x - 3y + z + \lambda = 0$$

Como este plano contiene a P : $1 - 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2$ El plano es $\pi_1 : x - 3y + z - 2 = 0$.

Cortamos el plano π_1 con la recta r : $(1 + \lambda) - 3(-3 - 3\lambda) + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -8/11$

El punto de corte lo obtenemos sustituyendo en la recta $H(3/11, -9/11, -8/11)$. Este punto será el punto medio entre P y Q :

$$\frac{P + Q}{2} = H \implies Q = 2H - P = (-5/11, -18/11, -27/11)$$