

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)**  
**Marzo 2006**

---

---

**Problema 1** Se pide:

1. Demostrar que, cualquiera que sea el valor de  $a$ , los vectores  $\vec{u}_1 = (a, 1, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, a)$  y  $\vec{u}_3 = (3a - 2, 1, 6 - 2a)$ , son linealmente dependientes.
2. Si  $a = 2$ , escribir el vector  $\vec{w} = (9, 2, 4)$  como combinación lineal de  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$

**Solución:**

1. 
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 3a - 2 & 1 & 6 - 2a \end{vmatrix} = 0 \implies \text{son linealmente dependientes}$$
2. Si  $a = 2 \implies \begin{cases} \vec{u}_1 = (2, 1, 2) \\ \vec{u}_2 = (1, 1, 2) \\ \vec{u}_3 = (4, 1, 2) \end{cases} \implies (9, 2, 4) = a(2, 1, 2) + b(1, 1, 2) \implies \begin{cases} a = 7 \\ b = -5 \end{cases} \implies \vec{w} = 7\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$

**Problema 2** Encontrar la distancia del punto  $P(1, 1, 1)$  a la recta  $L$  :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_L P} &= (0, 1, 0) \\ |\vec{u}_L \times \overrightarrow{P_L P}| &= \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(1, 0, 1)| = \sqrt{2}, \quad |\vec{u}_L| = \sqrt{3} \\ d(P, L) &= \sqrt{\frac{3}{2}} u \end{aligned}$$

**Problema 3** Se pide:

1. Demostrar que las rectas  $L_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$  y  $L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}$  se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

2. Encontrar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

**Solución:**

1.

$$\begin{cases} 1 + 2t = h \\ 1 - t = 0 \\ t = 4 - h \end{cases} \implies \begin{cases} t = 1 \\ h = 3 \end{cases} \implies P(3, 0, 1)$$

Luego se cortan en un punto  $P(3, 0, 1)$ .

2.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{U_{L_1}} \\ \overrightarrow{U_{L_2}} \\ P_{U_{L_2}}(0, 0, 4) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z - 4 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 3y + z - 4 = 0$$

**Problema 4** Sea el plano  $\pi : 3x - y + z - 3 = 0$  y la recta  $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

se pide:

1. Encontrar un plano  $\pi'$  perpendicular a  $\pi$  que contenga a  $r$ .
2. Calcular la proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\pi$
3. Calcular la proyección ortogonal del origen sobre  $\pi$
4. Si el plano  $\pi$  corta a los ejes coordenados en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , calcular el volumen del tetraedro formado por estos puntos con el origen de coordenadas, y la altura de éste sobre la base formada por los puntos.

**Solución:**

1.

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (3, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -1) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x - 1 \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies y + z = 0$$

2.

$$t : \begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

3. Calculamos la recta  $h$  perpendicular a  $\pi$  que pase por  $O$  y después cortamos con esta recta al plano  $\pi$ :

$$h : \begin{cases} \vec{\pi} = (3, -1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El corte lo encontramos sustituyendo en el plano

$$3(3\lambda) + \lambda + \lambda - 3 = 0 \implies \lambda = -\frac{3}{11}$$

lo que en la recta nos proporciona el punto buscado:

$$\left( \frac{9}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{3}{11} \right)$$

4.

$$\begin{cases} \text{Punto } A \text{ hacemos : } y = 0 \quad z = 0 \implies A(1, 0, 0) \implies \vec{OA} = (1, 0, 0) \\ \text{Punto } B \text{ hacemos : } x = 0 \quad z = 0 \implies B(0, -3, 0) \implies \vec{OB} = (0, -3, 0) \\ \text{Punto } C \text{ hacemos : } x = 0 \quad y = 0 \implies C(0, 0, 3) \implies \vec{OC} = (0, 0, 3) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{|-9|}{6} = \frac{3}{2} u^3$$

para calcular el área de la base calculamos los vectores

$$\vec{AB} = (-1, -3, 0) \text{ y } \vec{AC} = (-1, 0, 3)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-9, 3, -3)| = \frac{3\sqrt{11}}{2} u^2$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \implies h = \frac{3V}{S} = \frac{3\sqrt{11}}{11} u$$