

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Octubre 2006

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n , para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Aplicar la fórmula obtenida para calcular A^{1001} y A^{1003} .

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1001 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1003} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1003 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = CX \implies (A - C)X = B \implies X = (A - C)^{-1}B$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{bmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+3) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3 \implies x = 1, x = -3$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a & -1 & a & 2 \\ 3 & -a & 1 & a+1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a .

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & a \\ 3 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(a^2 - 1) = 0 \implies a = 1, a = -1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & 2 \\ 3 & -a & a+1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(a^2 + a - 2) = 0 \implies a = 1, a = -2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3a & a & 2 \\ 3 & 1 & a+1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9a^2 - a + 10 = 0 \implies$$

$$a = 1, \quad a = -\frac{10}{9}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ -a & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3a^2 + a - 4 = 0 \implies$$

$$a = 1, \quad a = -\frac{4}{3}$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $a = 1$, luego si $a \neq 1 \implies \text{Rango}(A) = 3$. Y si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.