

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)**  
**Enero 2006**

---

**Problema 1** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay - az = 2 \\ ax + y - z = 2a \\ 3x - y - z = a \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de  $a$ .
2. Resolver el sistema para el caso en el que  $a = 1$ , siempre que sea posible.

**Solución:**

1.

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & -a & 2 \\ a & 1 & -1 & 2a \\ 3 & -1 & -1 & a \end{array} \right)$$

$$|A| = 2a^2 - 2 = 0 \implies a = 1, a = -1$$

Si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{rango}(\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas  $\implies$  Sistema compatible determinado, con solución única.

Si  $a = 1$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como la primera y la segunda fila son iguales podemos concluir con que  $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$  de incógnitas  $\implies$  Sistema compatible indeterminado.

Si  $a = -1$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como la segunda fila es igual que la primera, pero multiplicada por  $-1$  podemos concluir con que el  $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$ . Es decir,  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 < n^\circ$  de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 2 + z \\ 3x - y = 1 + z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 2** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver, si es posible, la ecuación matricial

$$AX = BC + I_2 \quad \text{donde } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX = BC + I_2 \implies X = A^{-1}(BC + I_2)$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC + I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BC + I_2) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 12. Si a este número le restamos este mismo número pero leído al revés obtenemos  $-99$ . Calcular el número en cuestión sabiendo que dígito de las decenas es un a unidad mayor que el dígito de las unidades.

**Solución:**

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 100x + 10y + z - (x + 10y + 100z) = -99 \\ y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 12 \\ -x \quad \quad \quad z = 1 \\ \quad \quad \quad y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$$

El número es 354.