

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2005

Problema 1 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} 2X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = C - I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = C - I \Rightarrow AX = (C - I) + B \Rightarrow X = A^{-1}((C - I) + B)$$

$$(C - I) + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}((C - I) + B) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - 2F_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\text{Rango}(A) < 3$, busquemos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Concluimos con que el $\text{Rango}(A) = 2$.