

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2006

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y dominio de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1/2$ y $x = 3$.

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies x^3 - 1 = 0 \implies x = 1$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \implies$ No es PAR.

$$f(-x) \neq -f(x) \implies \text{No es IMPAR.}$$

3. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2} - x \right) = 0$$

$y = x$

4.

$$f'(x) = \frac{x^3 + 2}{x^3} = 0 \implies x = -\sqrt[3]{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (0, \infty)$

Decrece: $(-\sqrt[3]{2}, 0)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(-1.259921049, -1.889881574)$ donde pasa de crecer a decrecer, en el punto donde $x = 0$ la función pasa de decrecer a crecer, pero no es ni máximo ni mínimo, ya que la recta $x = 0$ es una asíntota.
- 6.

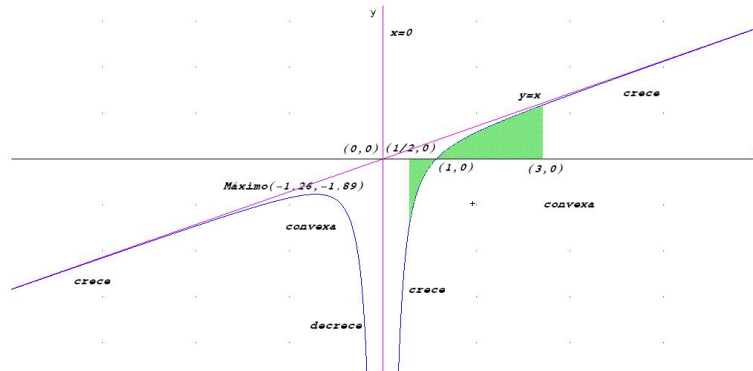
$$f''(x) = \frac{-6}{x^4} \neq 0$$

Luego no hay puntos de inflexión.

Como el numerador es siempre negativo, y el denominador es siempre positivo, la segunda derivada es siempre negativa. En conclusión, la función es convexa en todo su dominio.

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. Representación



8. La función tiene un cero en el intervalo de integración, esto quiere decir que, tendremos que integrar entre $1/2$ y 1 , y posteriormente entre 1 y 3 . Según se puede observar en la gráfica en el intervalo $(1/2, 1)$ el área será negativa, mientras que en el intervalo $(1, 3)$ será positiva. El área total será la suma de los valores absolutos de las áreas obtenidas.

Calculamos la primitiva:

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{8}, \quad F(1) = \frac{3}{2}, \quad F(3) = \frac{29}{6}$$

$$S_1 = \int_{1/2}^1 \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{17}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = F(3) - F(1) = \frac{29}{6} - \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Área} = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{8} + \frac{10}{3} = \frac{95}{24} = 3.958 \text{ u}^2$$