Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2006

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
   - $Dom(f) = R - \{1\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

3. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right)=2$$

$$y = x+2$$

4.

$$f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\Longrightarrow x=3,\ \ x=0$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

5. La función tiene un mínimo en el punto $(3, 6.75)$, en el punto donde $x = 0$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 1$ hay una asíntota, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

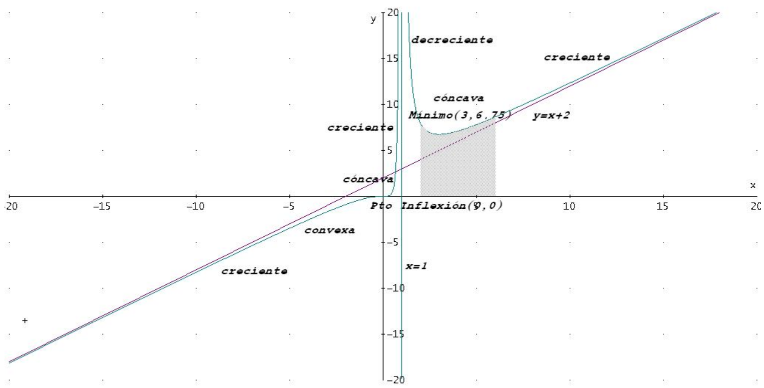
	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

En el punto $(0, 0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.
Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x)=6(3x+1)(1-x)^5\Longrightarrow f'''(0)=-\frac{6}{5}\neq 0$$

Luego en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.

$$F(x) = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{2x-4}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + C$$

Voy a resolver la integral. Como el grado del poliniomio del numerador es mayor que el del denominador divimos y nos queda

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

Esta última fracción la descomponemos en dos

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$3x-2 = (x-1)A+B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \Longrightarrow 1 = B \\ x=0 \Longrightarrow -2 = -A+B \end{array} \right. \Longrightarrow A=3, \;\; B=1$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 3\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} =$$

$$= 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$$

Luego

$$F(x) = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1|$$

$$S = |F(6)| + |F(2)| = \frac{124}{5} + 3\ln 5 = 29.62831373\ u^2$$