Examen de Matemáticas II (Coordinador 2006)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

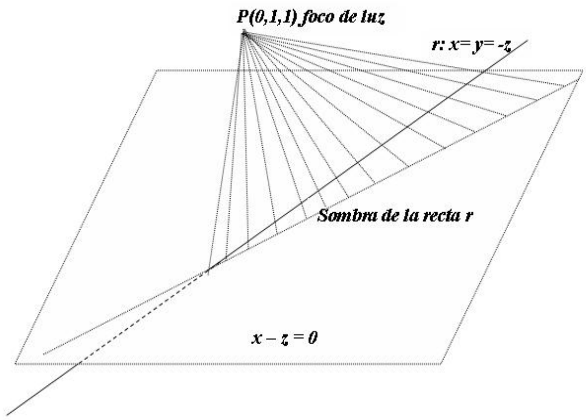
Problema 1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Solución:



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

El plano que contiene a P y a r será:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de r será la intersección de los planos π_1 y π:

$$s : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; y = 3 \Longrightarrow (1,3,1)$

Problema 2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 6, 5) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 0) \\ P_s(3, -4, 0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right| = (-6, 2, 2) = 2(-3, 1, 1)$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-3, 1, 1) \\ P_t(2, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array} \right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ k & k & -4 & -1 \end{array} \right), \quad |A| = 4k - 4 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado se observa que la tercera fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, en conclusión: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 3y- & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 11\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dada la función:

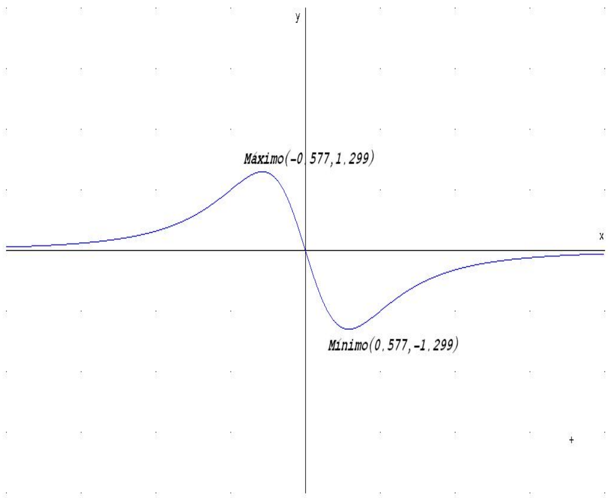
$$f(x) = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\, dx = -1$$

Solución:



a)

$$f'(x) = \frac{4(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

b)

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -2\int_0^a 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -2\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\Big]_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2}\Big]_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Longrightarrow a=\pm 1,\ \text{ como } a>0 \Longrightarrow a=1$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2006) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

a)

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{2}{x} = \sqrt{x^2 - 3} \Longrightarrow x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

b) Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \Longrightarrow m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = 2(x-2)$$

Como $m = -\dfrac{1}{m'} \Longrightarrow$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto). Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

a)

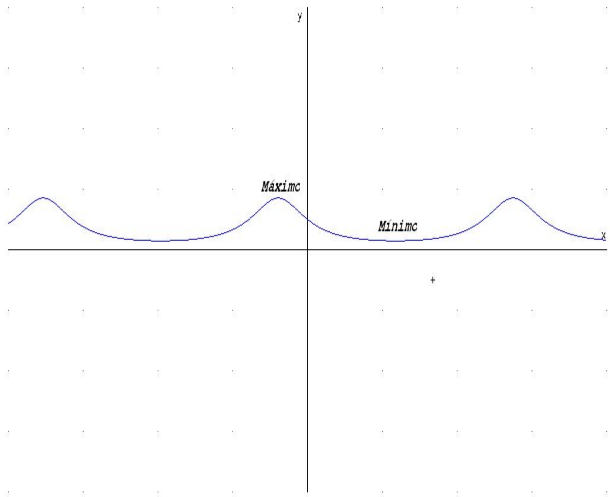
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2 + \sin x - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 0)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



b) Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos). Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 1) \\ P_r(-1, -2, 3) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

b)

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto). Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

a)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$