Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2005

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z= & a \\ ax- & y- & (a-1)z= & 2 \\ 3x+ & y+ & az= & 1 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a.

2. Resolver el sistema para los valores de a que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & a \\ a & -1 & -(a-1) & 2 \\ 3 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -4$$

Si $a \neq 2$ o $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso tenemos que Rango(A) =rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right), \quad A = \left|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right| = -20 \neq 0$$

En este caso tenemos que Rango$(A) = 2 \neq$rango$(\overline{A}) = 3 <$ Sistema incompatible (no tiene solución).

2. Cuando $a = 2$ podemos despreciar la primera ecuación y nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z= & 2 \\ 3x+ & y+ & 2z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2x- & y= & 2+z \\ 3x+ & y= & 1-2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - I = B - CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - I = B - CX \Longrightarrow X = (A+C)^{-1}(B+I)$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (A+C)^{-1}(B+I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 4/3 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Problema 3 En una familia se sabe que la edad del padre es igual a la de la madre y del hijo juntos. Dentro de diez años la edad de la madre será el doble de la del hijo, y hace cinco años entre el padre y la madre tenían 60 años. Calcular las edades de todos ellos.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + z \\ y + 10 = 2(z + 10) \\ x + y - 10 = 60 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & - \quad z = & 0 \\ & y & - \quad 2z = & 10 \\ x+ & y & = & 70 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 40 \\ y = 30 \\ z = 10 \end{array} \right.$$