Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2005

Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & az= & a \\ 2ax+ & ay- & z= & 1 \\ 3x+ & & az= & -1 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a.
2. Resolver el sistema, si es posible, para $a = 1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -a & a \\ 2a & a & -1 & 1 \\ 3 & 0 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$|A| = 3a^2 - 3 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistaema Compatible Determinado (Solución única).

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

En este caso tenemos que Rango(A) =rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

En este caso tenemos que Rango(A) =rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

2. Cuando $a = 1$ podemos despreciar la primera ecuación y nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & z= & 1 \\ 3x+ & & z= & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y= & 1+z \\ 3x+ & = & -1-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX + I = C + BX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - BX = C - I \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}(C - I)$$

$$C - I = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 \\ -4/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - B)^{-1}(C - I) = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 \\ -4/7 & -3/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4/7 \\ 1 & 9/7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Tres montañeros se volvieron a encontrar en la sierra después de 10 años sin verse. El mayor de ellos les recuerda que la última vez que se reunieron tenía el doble de la edad que tenían entre los dos juntos, y les comenta que en este momento tiene la suma de sus edades. El mediano dice que cuando el pequeño tenga la edad del mayor él tendrá 32 años. Pedro Cuello de Oro, observador de la conversación rápidamente quiso sacar conclusiones y nos propuso el problema de calcular la edad de cada uno de ellos.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 10 = 2(y + z - 20) \\ x = y + z \\ x - z = 32 - y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y- & 2z = & -30 \\ x- & y- & z = & 0 \\ x+ & y- & z = & 32 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ y = 16 \\ z = 14 \end{array} \right.$$