

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)**  
**Octubre 2005**

---

---

**Problema 1** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  es inversible.
2. Calcular  $A^{-1}$  para  $m = 2$ .

**Solución:**

1.

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m+1 = 0 \implies m = -1$$

Si  $m = -1 \implies |A| = 0 \implies$  no existe  $A^{-1}$ .

Si  $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies$  existe  $A^{-1}$ .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** Resolver la ecuación matricial  $A - BX = I$ . Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$A - BX = I \implies -BX = I - A \implies BX = A - I \implies X = B^{-1}(A - I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Calcular los valores de  $x$  para los que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x-2 \\ 1 & x-2 & x-2 & x \\ 1 & x-3 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 1 & x-1 & x & x-2 \\ 1 & x-2 & x-2 & x \\ 1 & x-3 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x-1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Nunca se puede cumplir que el valor de este determinante sea cero, sea cual sea el valor de  $x$ .

**Problema 4** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 & 0 \\ a & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de  $A$  para los diferentes valores de  $a$ .

**Solución:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a+1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2a - a^2 = -a(2+a) = 0 \implies a = 0, \quad a = -2$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ a & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a - a^3 = -a(1+a^2) = 0 \implies a = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 + a^2 + a = -a(a^2 - a - 1) = 0 \implies$$

$$a = 0, \quad a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} a & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -3a^2 - a = -a(3a+1) = 0 \implies a = 0, \quad a = -\frac{1}{3}$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es  $a = 0$ , para cualquier otro valor de  $a$  siempre hay alguno de ellos distinto de cero.

Cuando  $a = 0$  tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde podemos encontrar un menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego cuando  $a = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$ , y cuando  $a \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$ .