Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Enero 2005

Problema 1 Sean los puntos $A(1,-1,0)$, $B(2,1,1)$ y $C(1,3,-1)$ vértices consecutivos de un triángulo, se pide:

1. Calcular un cuarto vértice D de forma que A, B, C y D formen un paralelogramo.
2. Calcular el área de este paralelogramo.
3. Sea otro punto $A'(3,-1,4)$ y otros B', C' y D' de forma que con los anteriores formen un paralelepípedo. Calcular su altura.

Solución:

1. Tenemos que $\overrightarrow{BC} = (1,3,-1) - (2,1,1) = (-1,2,-2)$ y también tenemos que $\overrightarrow{AD} = (x,y,z) - (1,-1,0) = (x-1, y+1, z-0)$. Como tenemos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow D(0,-1,-2)$.

2. Tenemos que $\overrightarrow{AA'} = (3,-1,4) - (1,-1,0) = (2,0,4)$ luego

$$V = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}| = (-6,1,4) = \sqrt{36+1+16} = \sqrt{53}$$

$$V = S \cdot h \Longrightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{2}{\sqrt{53}} = 0,2747u$$

Problema 2 Calcular la altura de un tetraedro definido por los puntos de base $A(1,2,1)$, $B(-1,1,0)$, $C(2,3,1)$ y un cuarto $D(2,5,0)$

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0) - (1,2,1) = (-2,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,1) - (1,2,1) = (1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = (2,5,0) - (1,2,1) = (1,3,-1)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-3| = \frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ -2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right|=\frac{1}{2}|(1,-1,-1)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}S\cdot h\Longrightarrow h=\frac{3V}{S}=\sqrt{3}u$$

Problema 3 Se pide:

1. Dado el plano $3x-y+z-1=0$ encontrar un plano perpendicular a él que contenga a la recta $r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$
2. Dada la recta $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ encontrar un plano perpendicular a ella que contenga al punto $P(-1,-1,0)$.
3. Dada la recta
$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1-2\lambda\end{array}\right.$$
y el punto $P(2,2,3)$ encontrar un plano perpendicular al plano que definen esa recta y ese punto que contenga a la recta $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$

Solución:

1. $$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(3,-1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi':\left|\begin{array}{ccc} 3 & -1 & x-1\\ -1 & 1 & y+1\\ 1 & 2 & z\end{array}\right|=0$$
El plano buscado sería $\pi':3x+7y-2z+4=0$.

2. Como r es perpendicular al plano π buscado, la ecuación de este plano será de la forma $2x+y+2z+\lambda=0$, y como este plano tiene que contener al punto $P(-1,-1,0)$ se tiene que cumplir que
$$2(-1)+(-1)+2\cdot 0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=3$$
El plano buscado es $\pi:2x-y+z+2=0$.

3. Primero calculamos el plano
$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-2)\\ \overrightarrow{P_rP}=(-1,0,2)\\ P_r(1,2,1)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc} -1 & -1 & x-1\\ 1 & 0 & y-2\\ -2 & 2 & z-1\end{array}\right|=2x+4y+z-11=0$$

El plano que buscamos vendrá definido por

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (2,4,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \\ P_s(-1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ 1 & 4 & y-1 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

El plano buscado es $\pi' : 7x - 2y - 6z + 9 = 0$.