

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2005

Problema 1 En una empresa de enlatado de cerveza te encargan que calcules las dimensiones óptimas, que debe de tener una lata, de manera que tenga una capacidad de 0,5 litros, y gastemos la menor cantidad de material en hacerla.

Solución:

$$V = S_{base} \cdot h \implies V = \pi r^2 h = 0,5 \implies h = \frac{0,5}{\pi r^2}$$

$$S_{total} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + 2\pi r^2 \implies S' = -\frac{1}{r^2} + 4\pi r = 0 \implies$$

$$r = 0,4301270069dm$$

$$S'' = \frac{2}{r^3} + 4\pi \implies S''(0,43) = 37.69911184 > 0 \implies \text{Mínimo}$$

$$h = 0,02944513539dm$$

Problema 2 dada la función

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

Calcular:

1. Dominio
2. Puntos de Corte
3. Simetrías
4. Asíntotas
5. Monotonía
6. Máximos y Mínimos.
7. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. Dominio: $Dom f = R - \{-1, 1\}$
2. Puntos de Corte: $(0, 0)$

3. Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -f(x) \implies \text{Impar}$$

4. Asíntotas:

(a) Verticales: $x = 1$, $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

(b) Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

(c) Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^3 - x} - 2x \right) = 0$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$.

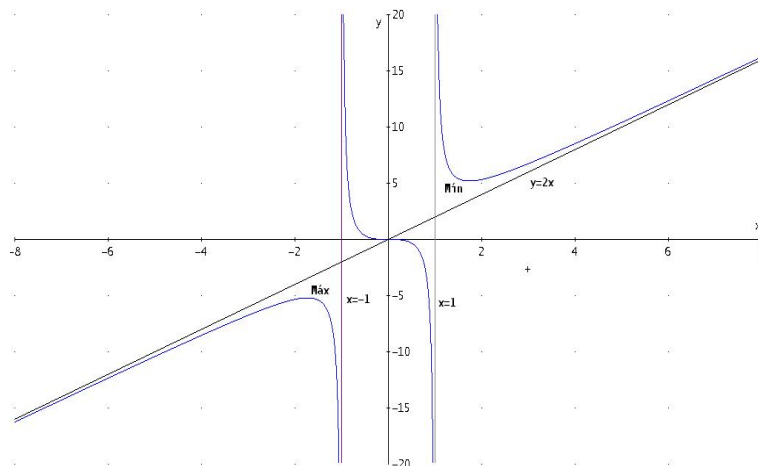
5. Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$$

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
+	-	+
creciente	decreciente	creciente

6. Máximos y Mínimos: A la vista del cuadro anterior podemos afirmar que la función presenta un Máximo en el punto $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ y un Mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

7. Representación Gráfica:



8. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$:

$$\int_2^4 \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \int_2^4 2x \, dx + \int_2^4 \frac{2x}{x^2 - 1} = x^2 + \ln(x^2 - 1) \Big|_2^4 = 12 + \ln 5$$

Problema 3 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + mx & \text{si } x < -1 \\ x^3 + n & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- determina m y n para que se cumplan la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-5, 3]$.
- Halla los puntos del intervalo que garantiza dicho teorema.

Solución:

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio la función debe de ser continua en el intervalo $[-5, 3]$ y derivable en el intervalo $(-5, 3)$.

(a) Continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 + mx = 2 - m$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 + n = -1 + n$$

Para que la función sea continua será: $2 - m = -1 + n \implies m + n = 3$.

(b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + m & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Para que la función sea derivable será: } f'(-1^-) = f'(-1^+) \implies -4 + m = 3 \implies m = 7$$

Luego los valores buscados son $m = 7$ y $n = -4$.

2. El teorema concluye con que $\exists c \in [-5, 3]$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-5)}{3 - (-5)} = \frac{23 - 15}{8} = 1$$

$f'(c) = 4c + 7 = 1$ si $c < -1 \implies c = -3/2$, solución que vale al ser un punto interior del intervalo.

$f'(c) = 3c^2 = 1$ si $c \geq -1 \implies c = -\sqrt{1/3}$ y $c = \sqrt{1/3}$, soluciones que valen por ser puntos interiores del intervalo.