Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2005) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende del parámetro real p

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0\\ -x+ & 2y+ & pz= & -3\\ x- & 2y- & z= & p \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema según los distintos valores de p.

2. Resolver el sistema para $p = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & p & -3\\ 1 & -2 & -1 & p \end{array}\right)$$

$$|A| = 3p - 3 = 0 \Longrightarrow p = 1$$

Si $p \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $= 3 =$ nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

Si $p = 1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0\\ -x+ & 2y+ & 2z= & -3\\ x- & 2y- & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1\\ \mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2\\ \mathrm{F}_3-\mathrm{F}_1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0\\ & 3y+ & 3z= & -3\\ & -3y- & 2z= & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1\\ \mathrm{F}_2\\ \mathrm{F}_3-\mathrm{F}_2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0\\ & 3y+ & 3z= & -3\\ & & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0\\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

1. Hallar sus asíntotas.

2. Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Solución:

1. Verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow x = -3$$

Las asíntotas verticales son $x = 3$, y $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Oblicuas: No hay por tener horizontales.

2.

$$f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

En el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, es un máximo.

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular

1. $P(B|A)$.

2. $P(\overline{A}|B)$.

Nota: $\overline{A}$ representa el suceso contrario del suceso A.

Solución:

1.

$$P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) \Longrightarrow$$

$$P(A\cap B) = 1 - P(\overline{A}\cup\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

2.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{3}{5}$$

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$$

Problema 4 *(2 puntos)* El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0.2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?.

Solución:

$$N(\mu, 1), \quad n = 100, \quad E = 0.2$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0.2 = z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{100}} \Longrightarrow$$

$$z_{\alpha/2} = 2 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0.9772$$

El nivel de confianza es del 97.72%.