Examen de Matemáticas II (Junio 2005) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & =1- & 3z \\ 2x+ & y & =2+ & z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\dfrac{5}{3}t \\ \\ y=-\dfrac{7}{3}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

b) Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1,2,3,1)+b(2,1,-1,2)=(5,1,\alpha,\beta) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b=5 \\ 2a+b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$ $a=-1,\ b=3 \Longrightarrow \alpha=-6,\ \beta=5$

Problema 2 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA=B$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \Longrightarrow XA = AB \Longrightarrow X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{(Adjt(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = [\infty-\infty] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\qquad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,4)\\ P_r(1,1,1)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(-1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\2&3&4\\1&-1&2\end{array}\right|=(10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,4)\\ P_r(1,1,1)\end{array}\right.\qquad \pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(-1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{ccc}2&2&x-1\\3&0&y-1\\4&-1&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 3x-10y+6z+1=0$$

$$\pi_2:\left|\begin{array}{ccc}1&2&x+1\\-1&0&y-2\\2&-1&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x+5y+2z-9=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{rrl}3x-&10y+&6z+1=0\\x+&5y+&2z-9=0\end{array}\right.$$

b)

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,0) - (1,1,1) = (-2,1,-1)$$