Examen de Matemáticas II (Septiembre 2005) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{array}$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & \lambda \\ 4x+ & (\lambda-2)y+ & (\lambda+2)z = & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x- & & (\lambda+6)z = & -\lambda \end{array} \right.$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array} \right)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{array} \right| = (2-\lambda)(3\lambda+8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \;\; \lambda = -\frac{8}{3}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -\frac{8}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{array} \right| = -56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6} \neq \frac{1}{-8} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6} \neq \frac{4}{-8} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Si $\lambda = -\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que Rango$(\overline{A}) = 3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array} \right)$$

$\frac{1}{4} \neq \frac{0}{-14/3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan
$\frac{1}{-10/3} = \frac{1}{-10/3} \neq \frac{-8/3}{8/3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 son paralelos
$\frac{4}{-10/3} \neq \frac{-14/3}{0} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan

Problema 2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 3 \\ x+ & y & -z & = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & = 4 \\ 2x- & y & & = 7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -3, -3) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -2, -1) \\ P_s(0, -7, -4) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1, 1, 2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = (-1, -2, -1)$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array} \right| = (3, -1, -1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -1, -1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) Sustituimos t en s y tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3, -1, -1)$.

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2, \ \beta = -1$$

b)

$$A^5 = A^2A^2A = (2A-I)^2A = (4A^2+I^2-4AI)A = (4A^2-4A+I)A =$$

$$4(2A-I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A-I) + A =$$

$$8(2A-I)-4A-8A+4I+A = 5A-4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$(A-X)(A+X) = A^2 - X^2 \Longrightarrow A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2$$

$$\Longrightarrow AX - XA = 0 \Longrightarrow AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$

b) (1 puntos) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

a)

$$f(a) = \frac{1}{a}, \;\; m = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

b) Haciendo $y = 0 \Longrightarrow A(2a, 0)$ y haciendo $x = 0 \Longrightarrow B\left(0, \frac{2}{a}\right)$.

c)

$$d(a) = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{2}{a}\sqrt{a^4 + 1}$$

$$d'(a) = \frac{2a^4 - 2}{a^2\sqrt{a^4 + 1}} = 0 \Longrightarrow \;\; a = 1, \;\; a = -1$$

Como $a > 0 \Longrightarrow a = 1$ En el intervalo $(-1, 1)$ la d' es negativa y en el $(1, +\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a = 1$ y, por tanto, es un mínimo.