Examen de Matemáticas II (Junio 2005)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1-2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$
- $$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$p(0) = d = 1$$

- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left.\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a+2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a+c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \ \ c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z = & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z = & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z = & 4 \end{array}\right.$$

1. (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.
2. (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2, \ m = -1, \ m = 4$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A\neq$Rango$\overline{A}\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m=2$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 2 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right|=-4\neq 0$$

Luego en este caso Rango$A\neq$Rango$\overline{A}\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m=4$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 3 & 7\\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 4 & 3 \end{array}\right|=5\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango$A=$Rango$\overline{A}=2<$n$^{\text{o}}$ incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2. Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z=3\\ 4x+ & 3y+ & 3z=7 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y= & 3- & z\\ 4x+ & 3y= & 7- & 3z \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5}\\ \\ y=\dfrac{9}{5}-\lambda\\ \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

2. (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

1. Se trata de la ecuación de una esfera

   $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2 = 0$

2. Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

   $(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow$

   $$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = 0$$

   Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

   Para $\lambda = 0 \Longrightarrow (0, 1, 1)$ y para $\lambda = 1 \Longrightarrow (3, 2, -3)$.