Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Octubre 2003

Problema 1 *(3 puntos)*Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
2. Resolver la siguiente igualdad matricial:
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:
$$3A \cdot A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$
2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculamos A^{-1}:
$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
Sustituimos en la ecuación:
$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

1. Calcular el determinante de A.
2. Calcular el rango de B.

Solución:

1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 : F_1 + F_3 \\ F_4 : F_4 - 2F_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = [F_1 : F_1 + F_2] =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

2. Calculamos el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el rango de B no puede ser 3, Rango$(A) < 3$. Buscamos menores de orden 2, que sean distintos de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$.

Problema 3 *(2,5 puntos)*Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hállala para $x = 1$

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1} para $x = 1$
  Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2$$

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]}{-2} \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{86}.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

A partir de A^3 se vuelven a obtener los mismos resultados. Si dividimos $86 : 3$ obtenemos de resto 2, luego

$$A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$