Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Octubre 2003

Problema 1 *(4 puntos)*Se considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x+ & y & & = & 1 \\ & my & + & z = & 0 \\ x+ & (m+1)y & +mz = & & m+1 \end{array}\right.$$

1. Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro m.
2. Resolver el sistema para m=0

Solución

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A} = 3 =$ nº de incógnitas, por lo que el sistema es Compatible Determinado. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ buscamos un menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Luego el Rango$(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$.

En este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$, luego el sistema es Incompatible.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ buscamos un menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Luego el Rango$(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$

Observamos que la primera y la tercera fila son iguales.

En este caso tenemos que Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

2. Cuando $m = 0$, observando el menor elegido anteriormente, podemos eliminar la última fila, por lo que tendremos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*En un determinado pueblo se presentan tres espectáculos, que llamaremos E_1, E_2 y E_3, respectivamente, cada uno con un precio diferente.

Calcula el precio de cada espectáculo sabiendo lo siguiente:

1. Si asistíeramos dos veces a E_1, una vez a E_2 y una vez a E_3 nos costaría 34 euros.
2. Si asistíeramos tres veces al espectáculo E_1 y una a E_2, nos costaría $46,5$ euros.
3. En el caso de asistir una vez a cada uno de los tres espectáculos, nos costaría $21,5$ euros.

Solución:

Precio de $E_1 = x$
Precio de $E_2 = y$
Precio de $E_3 = z$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 2x & +y & +z = & 34 \\ 3x & +y & = & 46,5 \\ x & +y & +z = & 21,5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12,5 \\ y = 9 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(3 puntos)*Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} \dfrac{3}{2}x- & \dfrac{1}{4}y = & 0 \\ \\ x- & \dfrac{1}{2}y = & -2 \end{array}\right.$$

1. Exprésalo en la forma matricial $AX = B$.
2. Calcula la matriz inversa de A.
3. Resolverlo.

Solución:

El sistema es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rrr} 6x & -y = & 0 \\ 2x & -y = & -4 \end{array}\right.$$

1.

$$\left(\begin{array}{rr} 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r} 0 \\ -4 \end{array}\right)$$

2. Calculamos A^{-1}

$$A = \left(\begin{array}{rr} 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right) \qquad |A| = -4$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -2 & 6 \end{array}\right)}{-4} \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{rr} 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -3/2 \end{array}\right)$$

3.

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \left(\begin{array}{rr} 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -3/2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{r} 0 \\ -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 6 \end{array}\right)$$