Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2002

Problema 1 Dada la función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos. Dibujo aproximado de la gráfica.

2. Calcular el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. (a) Dominio: La función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ está compuesta por el producto de dos funciones, la función $h(x) = x$ cuyo dominio es todo el eje de abcisas, y la función $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ cuyo dominio está definido por la incuación $4 - x^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación será: $-x^2 \geq -4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En conclusión podemos asegurar que el dominio de la función pedida será el intervalo $[-2, 2]$.

   (b) Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con el eje de abcisas vendrán determinados cuando $f(x) = 0$, es decir, $x\sqrt{4-x^2} = 0$, ecuación que nos produce las soluciones: $x = 0$, $x = 2$, y $x = -2$. Por tanto la gráfica cortará al eje de abcisas en los puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y en el $(-2,0)$. Ahora calculamos los cortes con el eje de ordenadas, es decir, hacemos $x = 0$, lo que nos produce una única solución que ya habíamos obtenido antes, y es el punto $(0,0)$.

   (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Para ello calculamos la primera derivada, que sería la siguiente:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(4-x^2)^{-1/2}(2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

   Ahora tendremos que ver cuando esta derivada es positiva, es nula, o es negativa. Para ello igualamos la derivada a cero, lo que nos daría lo siguiente:

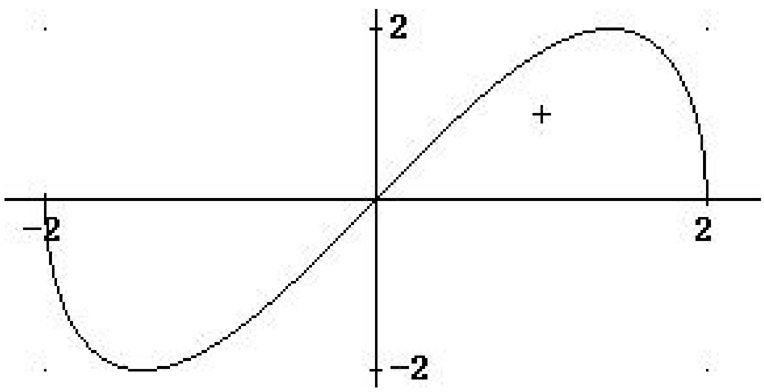
$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow 4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

Ahora, recordando los puntos de corte con los ejes, el dominio de la función y observando que el denominador es siempre positivo, es fácil comprobar lo que nos piden.
Entre $x = -2$ y $x = -\sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[-2, -\sqrt{2}]$
Entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace positivo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
Entre $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$

(d) A la vista del apartado anterior, está claro que, la función tiene un mínimo en $-\sqrt{2}$ y un máximo en $\sqrt{2}$, resultados que al sustituidos en la función original darían los puntos: Mínimo= $(-\sqrt{2}, -2)$ y Máximo= $(\sqrt{2}, 2)$

(e) Para dibujar la gráfica ordenamos los resultados en una tabla, y los interpretamos cuidadosamente.

x	f(x)	
0	0	
2	0	
-2	0	
$-\sqrt{2}$	-2	Mínimo
$\sqrt{2}$	2	Máximo



2. Los puntos de corte con el ejes de abcisas son -2, 0, 2. La función es impar, es decir, simétrica respecto al origen, esto se aprecia fácilmente en su representación gráfica. Esto último se puede demostrar comprobando $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

Esto quiere decir que el área que encierra la curva entre el punto $(-2,0)$ y el $(0,0)$ es igual que el área que encierra la curva entre los puntos $(0,0)$ y el $(2,0)$. Por tanto bastará con calcular una de estas áreas y multiplicar por 2.

$$A = 2\int_0^2 f(x) = 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

Resolveremos por sustitución.
$u = 4 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$ y sustituyendo nos queda la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{u^{3/2}}{3} + C$$

y deshaciendo el cambio de variable nos quedaría:

$$A = 2\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{4^{3/2}}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

Problema 2 Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3. Utilizando el cambio de variable $\ln x = t$, calcular:

$$I = \int_1^e \frac{1+\ln x^2 + (\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx$$

Solución:

1. Descomponiendo los polinomios según sus raices tendremos que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ y $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Sustituyendo:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

2. Para solucionar este límite voy a emplear dos métodos:

(a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = [1^\infty] = e^\lambda$$

Donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Luego

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^\lambda = e^0 = 1$$

(b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

En esta condiciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Es decir, $\ln A = 0 \Longrightarrow\ A = 1$

3. Primero voy a solucionar la integral sin tener en cuenta los límites de integración y luego los aplicaremos.
   La integral la vamos a resolver por sustitución, haciendo $\ln x = t \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = dt$ y sustituyendo tendremos:

$$\int \frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int \frac{1+2t+t^2}{(1+t)}dt =$$

$$\int \frac{(1+t)^2}{1+t}dt = \int (1+t)dt = t+\frac{t^2}{2}+C = \ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$I = \left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(\ln 1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Problema 3 Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4, 0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow \ x = 2$$

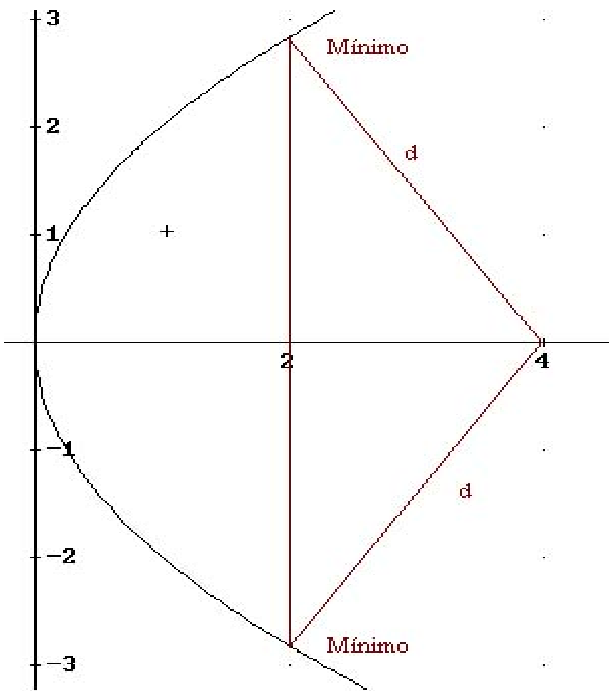
Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:

Si $x < 2 \Longrightarrow \ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece

Si $x > 2 \Longrightarrow \ d' > 0 \Longrightarrow$ crece

Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.



Problema 4 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.
Solución:

1. D=$\{x \in R$ tales que $x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
   $x = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.
   (b) Puntos de corte con el eje X:
   $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje Y.
4. $$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

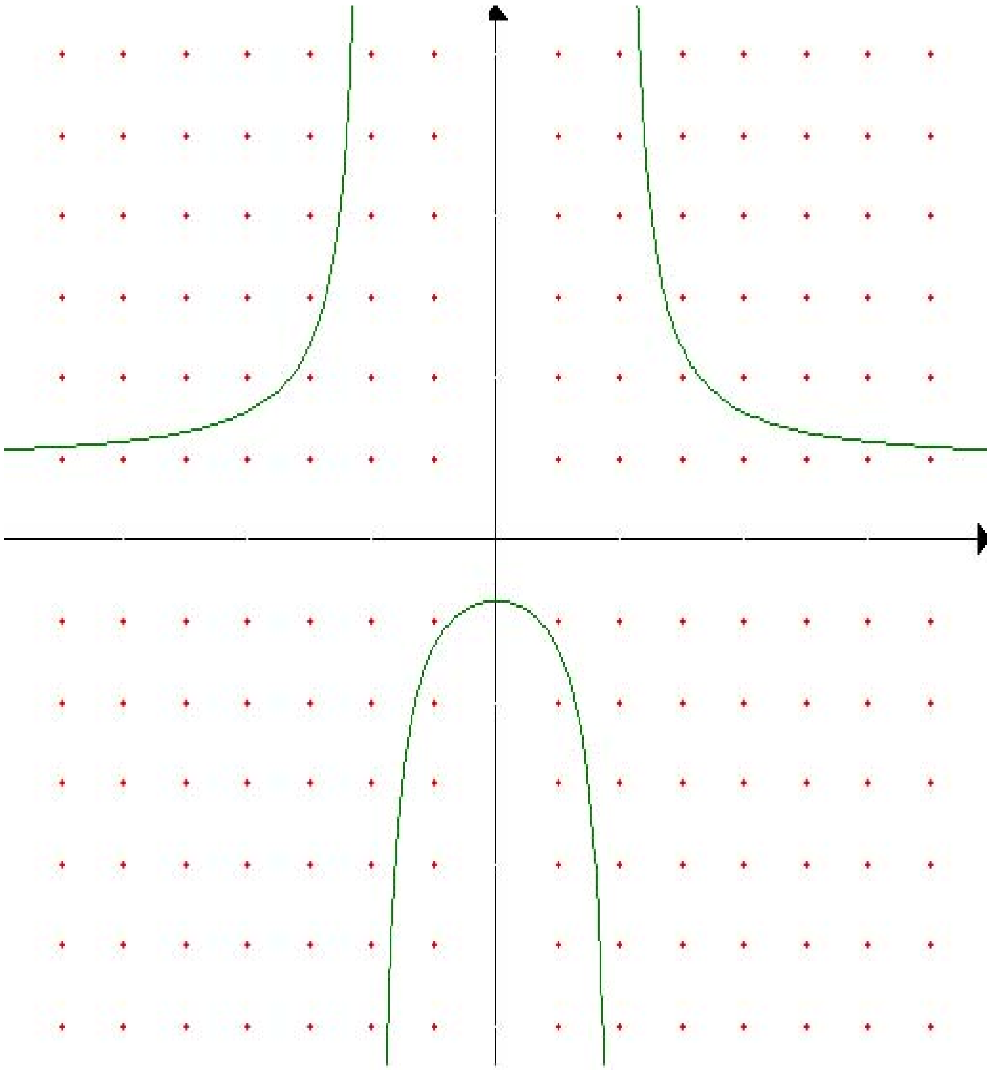
   Como $(x^2 - 4)^2 \geq 0$ para cualquier x, bastará estudiar el signo del numerador:

   (a) Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente.
   (b) Si $x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

   En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \Longrightarrow -14x = 0 \Longrightarrow x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:



Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1$.

Problema 5 1. Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{-\cos x} =$$
$= -2.$

2. Determina el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = e$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax} = [1^{\infty}] = e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} ax\left(\frac{x+3}{x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} ax\left(\frac{3}{x}\right) = 3a$$

Como $\lambda = 1 \Longrightarrow 3a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$.

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :

$$\int \frac{x}{(1-2x^2)^2}dx$$

Solución:
Hacemos $u = 1-2x^2 \Longrightarrow du = -4x\cdot dx \Longrightarrow \frac{du}{-4} = x\cdot dx$ y sustituimos:

$$\int \frac{x}{(1-2x^2)^2}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C = \frac{1}{4u}+C = \frac{1}{4(1-2x^2)}$$
$+C$

Problema 6 Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2+x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.
Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$
\begin{array}{rl}
x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 & \quad \lfloor x^2 + x \\
\underline{-x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad} & \quad x^2 - x + 1 \\
-x^3 + 0x^2 + x + 1 & \\
\underline{+x^3 + x^2 \qquad\quad} & \\
x^2 + x + 1 & \\
\underline{-x^2 - x \quad} & \\
1 &
\end{array}
$$

Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \int (x^2 - x + 1) dx + \int \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array} \right.$$

Luego tendremos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1} \right) + C
\end{aligned}
$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:
  Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in R \text{ tales que } \frac{x}{x+1} > 0 \text{ y } x \neq -1\}$
  Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\frac{x}{x+1}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
signo x	$-$	$-$	$+$
signo $(x+1)$	$-$	$+$	$+$
signo $\frac{x}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$$

Problema 7 Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

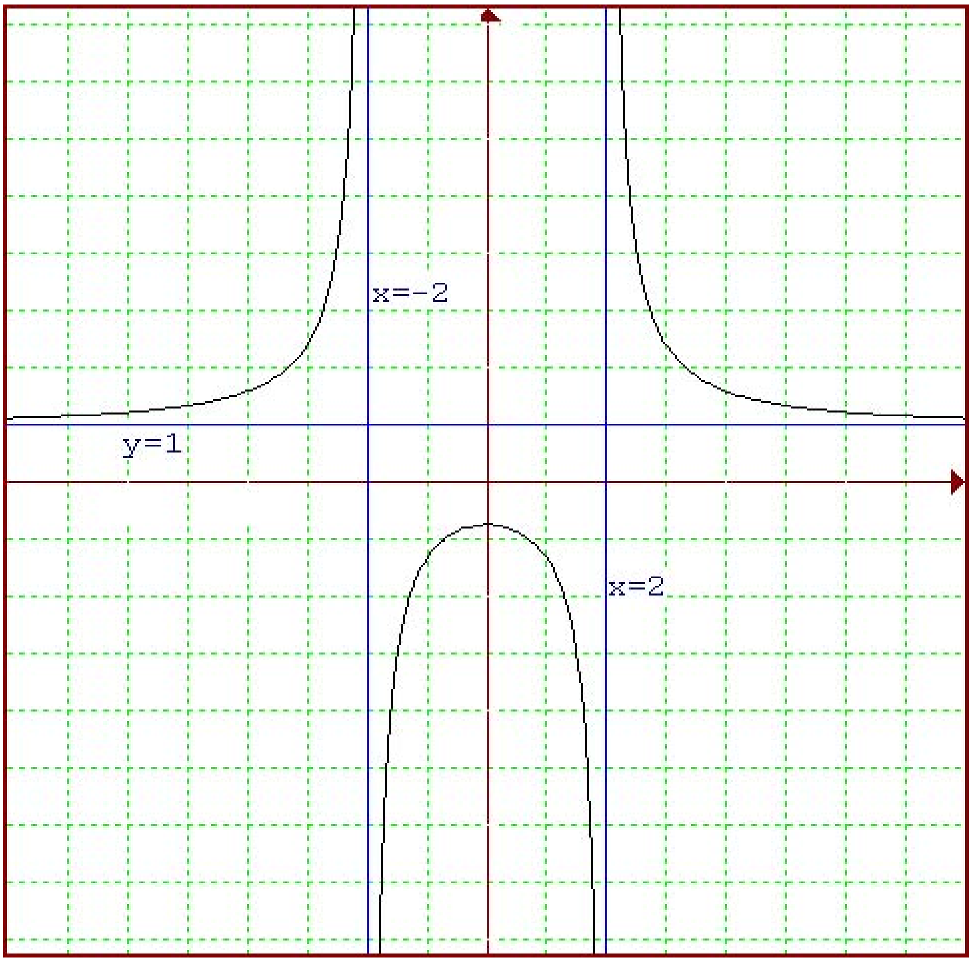
$$y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se pide:

1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in R;\ x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = f(x)$
   Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y.
3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
   $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Longrightarrow\ x^2+3 = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje X.
   Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
   $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.
4. Asíntotas:
   - Verticales:
     $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \infty \Longrightarrow x = 2$ es una asíntota vertical
     $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \infty \Longrightarrow x = -2$ es una asíntota vertical
   - Horizontales:
     $\displaystyle y = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 \Longrightarrow\ y = 1$ es una asíntota horizontal.


x=-2
y=1
x=2

- Oblicuas:

  $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entoces $a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+3}{x(x^2-4)} = 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.

5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2-4)^2}$$

Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow 14x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Analizamos el signo de y':

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
signo y'	$+$	$+$	$-$	$-$
y	**creciente**	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**

En resumen:

- La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- La función decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

6. Observamos que en el punto de abcisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.

7. Representación gráfica:

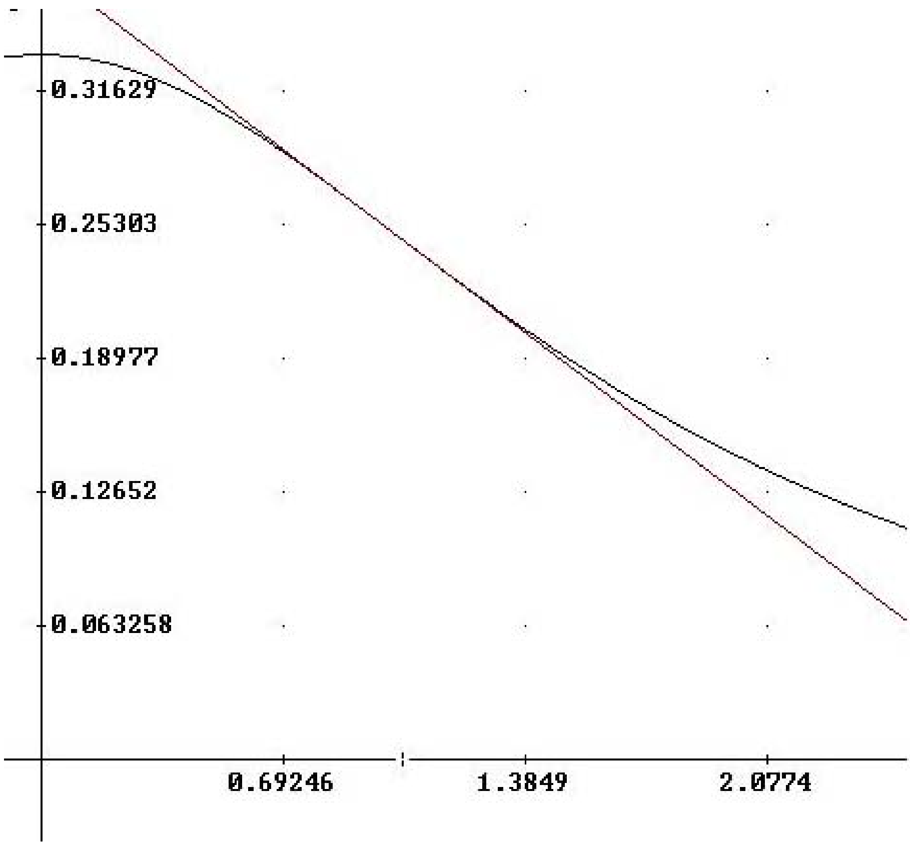
Problema 8 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

1. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

2. (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:



1. Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Sisutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

2. El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx + \int_1^3 \frac{3-x}{8}\,dx$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{1}{x^2-3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \;\; dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx + \int_1^3 \frac{3-x}{8}\,dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 + \left[\frac{3x}{8}-\frac{x^2}{16}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{1}{4}$$

Problema 9 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

1. (Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:
   - Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1,0) \cup (0,+\infty)$.
   - Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty,-1)$.

- En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:
La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

  Luego f es continua en $x = -1$.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no es continua en $x = 0$.

- En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:
  No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

  Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:

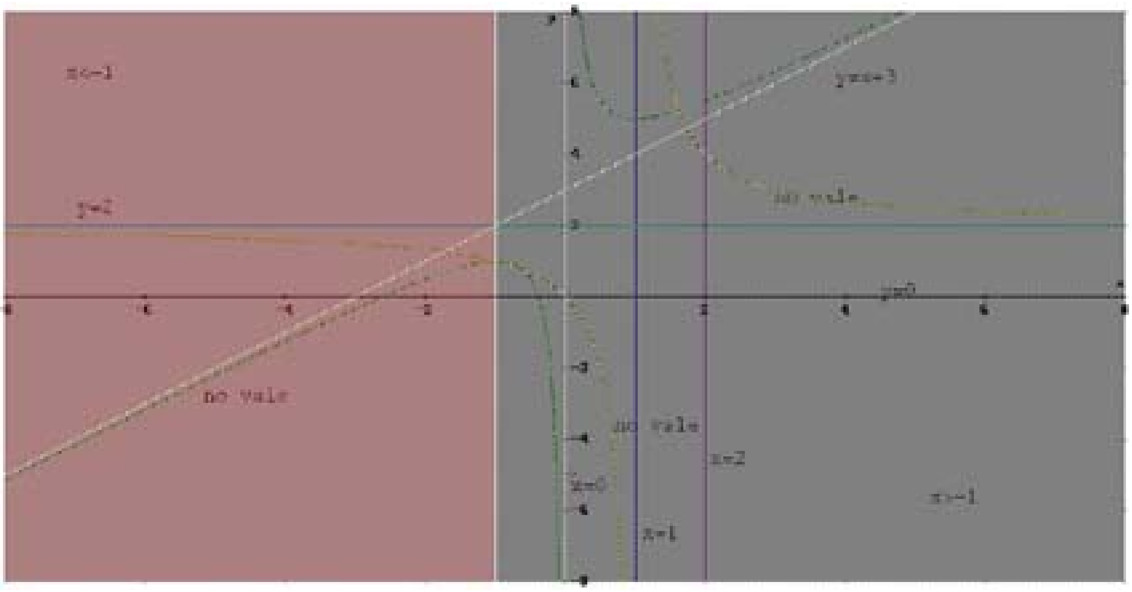
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$



- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

Problema 10 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 11 Calcular por la regla de L'Hôpital

1. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

Problema 12 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}} = \frac{2}{3}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = [3^\infty] = \infty$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

Problema 13 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\cos x-1)}{x}\cdot(\cos x+1)=0$$

Problema 14 Halla los valores de a y de b para que sea derivable y continua la función $f:R\longrightarrow R$ dada por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^2+ax+b & \text{si} & x\le 0\\ & & \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Tenemos que estudiar la continuidad, y para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplir

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (x^2 + ax + b) = b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$f(0) = b$$

Luego $b = 1$

Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto. Para que sea derivable debe de cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$

Para calcular $f'(0^-)$ calculamos la derivada de la rama correspondiente y sustituimos $x = 0$

$$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(0^-) = a$$

Para calcular $f'(0^+)$ calculamos la derivada de esta rama empleamos límites, hay que tener en cuenta que $f(0) = b = 1$

$$f'(0^+) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{2h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 - (1+h)}{2h(1+h)} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h}{2h + 2h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-1}{2 + 4h} = -\frac{1}{2}$$

Para que sea derivable $f'(0^-) = f'(0^+) \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto $b = 1$ y $a = -\dfrac{1}{2}$

Problema 15 Calcular

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}=$$
   $$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}=$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]$$

   Observando el límite vemos que

   $$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=0\\[2ex]\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\quad\text{no tiene sentido}\end{cases}$$

   Podemos concluir con que el límite no existe.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

   Solución:

   LLamamos $L=\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}\Longrightarrow\ln L=\lim\limits_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}$

   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}=$$
   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos x\tan^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos^2 x\tan^2 x}{-\tan x}=$$

   $$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}-\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{\cos x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0$$

   Luego tenemos que $\ln L=0\Longrightarrow e^0=L\Longrightarrow L=1$, es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

Problema 16 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = \ln(x + 8)$, escribir la función $g \circ f$ y calcular su derivada.

Solución:

$$u = g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$$

$$u' = \frac{\frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-2/3}(2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1) + 24\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}$$

Problema 17 Calcular las funciones derivadas de las siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{6x^2 \cos x - 2x^3(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x^2(3\cos x + x \sin x)}{\cos^2 x}$$

2. $g(x) = \frac{2}{3}\ln(5x)$

   Solución:

   $$g'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5x} = \frac{2}{3x}$$

3. $h(x) = \frac{1}{2}\, e^{5x-3}$

   Solución:

   $$h'(x) = \frac{1}{2}\, e^{5x-3} \cdot 5 = \frac{5}{2}\, e^{5x-3}$$

Problema 18 Dada la curva de ecuación $y = -x^2 + 26x$, cálculese la recta tangente a la misma que sea paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución:

La recta $y = -x$ tiene de pendiente $m = -1$. La recta tangente a la función tiene que tener esta pendiente que, como sabemos, se obtiene a partir de la primera derivada.

$y' = -2x + 26 = -1 \Longrightarrow x = \frac{27}{2},\ \ y = \frac{675}{4}$

La recta pedida pasa por el punto $\left(\frac{27}{2}, \frac{675}{4}\right)$ y tiene de pendiente $m = -1$, aplicando la ecuación de la recta punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos que

$$y - \frac{675}{4} = -\left(x - \frac{27}{2}\right) \Longrightarrow x + y = \frac{729}{4}$$

Problema 19 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

1. Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
3. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:** No tiene, ya que el dominio de la función es todo R.
   - **Asíntotas horizontales:**
     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$
     Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
     Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
     $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = 0$$
     Luego no hay asíntotas oblicuas.
2. Este apartado tiene dos subapartados
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero
     $$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$
     Que serían los puntos $(1, e)$ y $(-1, e^{-1})$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

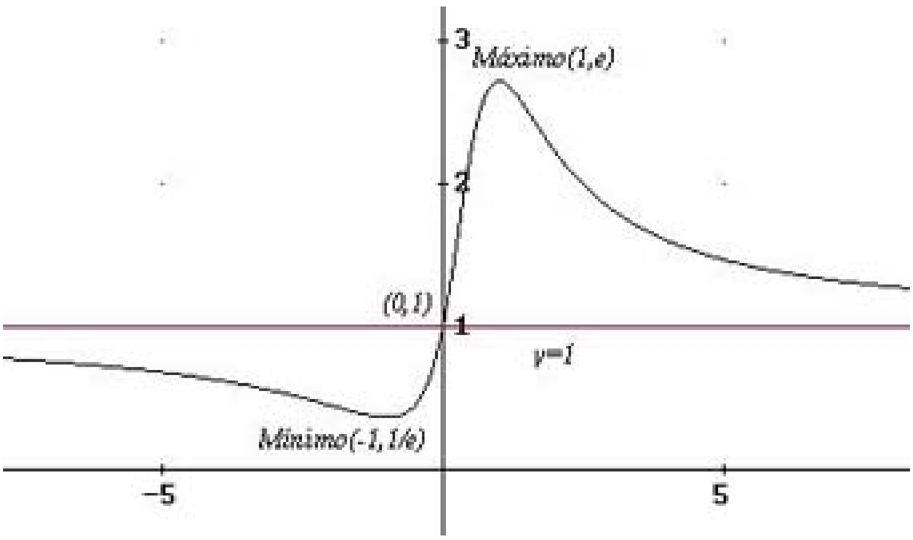
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo y lo mismo ocurre con $e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, el estudio del signo se reduce al de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	$+$	$-$
	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(1, e)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(-1, e^{-1})$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

3. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$ único punto de corte, ya que con el eje de abcisa no habría ninguno.



Problema 20 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0, 1\}$

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.
   $$\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$
   Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$
   Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{9x-3}{x^2-2x}}{x} = 0$$
   Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

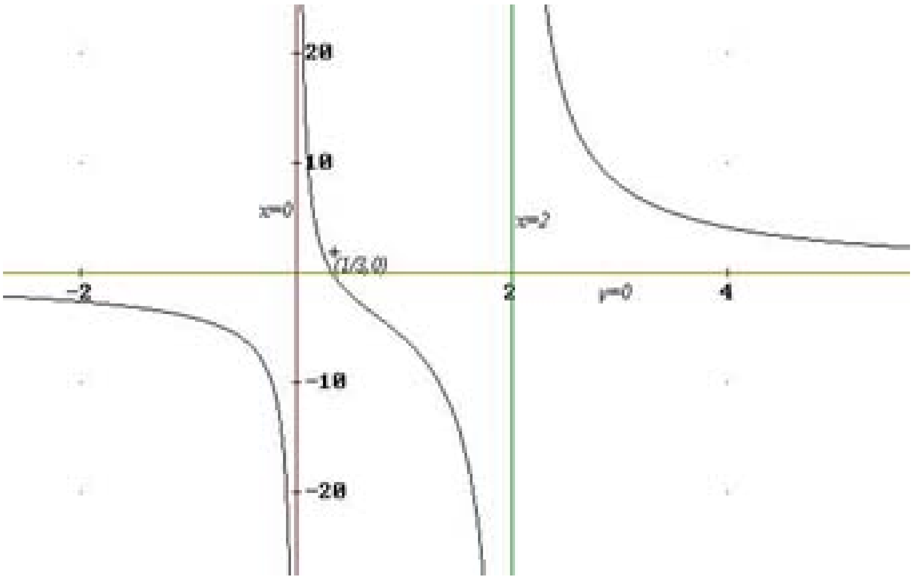
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero
   $$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$
   Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x-2)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $3x^2 - 2x + 2$, que es siempre positivo. Luego $f'(x) < 0$ y por tanto la función es siempre decreciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $y = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$ único punto de corte, ya que con el eje de ordenadas no habría ninguno.



Problema 21 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right)$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $\dfrac{x^2-2}{2x-1} < 0$

$$Dom(f) = \left\{ x \in R : \frac{x^2-2}{2x-1} > 0 \right\}$$

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1/2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1/2} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \pm\infty$$

   Luego $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \pm\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = -\infty$$

   Luego $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ son asíntotas verticales.

   - **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \infty$$

   Luego no tiene asíntotas horizontales.

   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)}{x} = 0$$

   Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)} = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

   Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 2)}{(x^2 - 2)(2x - 1)}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del numerador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $(x^2 - 2)(2x - 1)$, que es siempre positivo en este dominio. Luego $f'(x) > 0$ y por tanto la función es siempre creciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

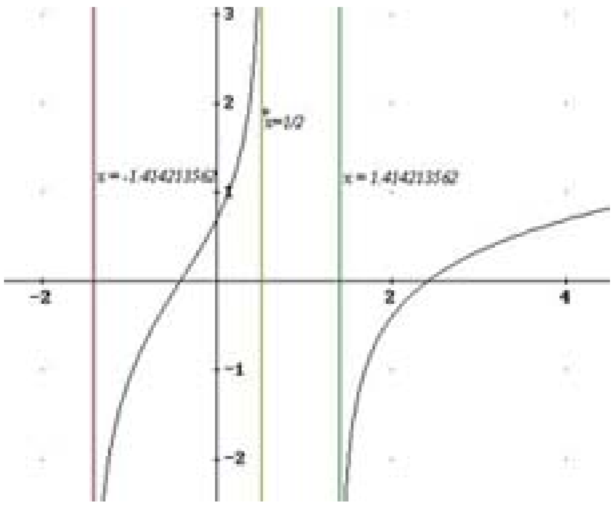
$$y = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 2}{2x - 1}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 2}{2x - 1} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

- Con el eje de ordenadas

$$x = 0 \Longrightarrow y = \ln 2$$

- Los puntos son

$$(0, \ln 2);\ (1 + \sqrt{2}, 0);\ (1 - \sqrt{2}, 0)$$



Problema 22 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los máximos y mínimos de f.
4. Determina los puntos de inflexión de f.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $x^3 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \pm\infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0$$
   Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = 0$$
   Luego no hay asíntotas oblicuas.
3. Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igualamos a cero
   $$f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$$
   Para comprobar si son máximos o mínimos recurrimos a la segunda derivada
   $$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} \Longrightarrow \begin{cases} f''(\sqrt{3}) < 0 \\ f''(-\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$
   Tenemos un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

   Tenemos un máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

4. Para calcular los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\sqrt{6}, -\dfrac{5}{6\sqrt{6}}\right) \\ \left(\sqrt{6}, \dfrac{5}{6\sqrt{6}}\right) \end{array} \right.$$

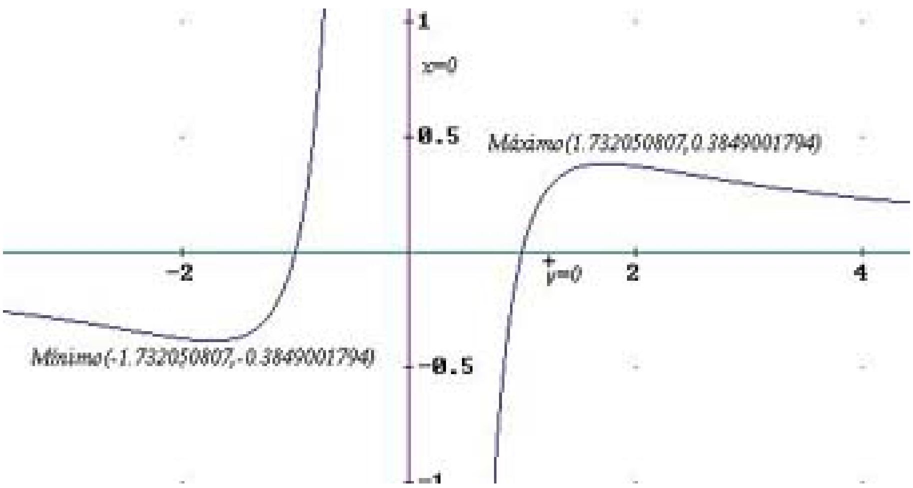
5. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

- Con el eje de ordenadas no hay puntos de corte
- Los puntos son

$$(1, 0); \ (-1, 0)$$



Problema 23 Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos" de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Solución:

Tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = 2x \end{array} \right. \Longrightarrow z = 60 - 3x$$

El producto de los tres números es $P(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot 2x \cdot (60 - x) = -6x^3 + 120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -18x + 240 = 0 \Longrightarrow x = \frac{40}{3} \end{cases}$$

Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada

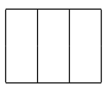
$$P''(x) = -36x + 240 \Longrightarrow \begin{cases} P''(0) = 240 > 0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right) = -240 < 0 \end{cases}$$

Luego cuando $x = 0$ tenemos un mínimo, y cuando $x = \dfrac{40}{3}$ es un máximo. Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean enteros, tenemos $13 < \dfrac{40}{3} < 14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos

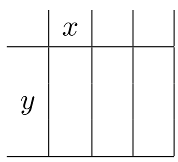
$$\begin{cases} P(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7098 \\ P(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7056 \end{cases}$$

Los tres números buscados son $x = 13$, $y = 26$ y $z = 60 - 3x = 21$. El valor del producto será $P(13) = 7098$.

Problema 24 Un solar rectangular de $11250\, m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50, \ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

Problema 25 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \frac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \frac{x(4-x)}{2} = \frac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

Problema 26 Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.

Solución:

Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \frac{a \cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60 - 2b) \cdot \sqrt{b^2 - \left(\frac{60 - 2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(30-b)^2}=(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(900+b^2-60b)}\Longrightarrow$$
$$S(b)=(30-b)\cdot\sqrt{60b-900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b)=-\sqrt{60b-900}+(30-b)\cdot\frac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}=$$

$$-\sqrt{60b-900}+(30-b)\cdot\frac{30}{\sqrt{60b-900}}=\frac{-(\sqrt{60b-900})^2+(30-b)\cdot 30}{\sqrt{60b-900}}=$$

$$\frac{-(60b-900)+(900-30b)}{\sqrt{60b-900}}=\frac{-60b+900+900-30b}{\sqrt{60b-900}}=\frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}$$

$$S'(b)=\frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}=0\Longrightarrow b=20,\ \ a=20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b)=\frac{-90\cdot\sqrt{60b-900}-(1800-90b)\cdot\dfrac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}}{(\sqrt{60b-900})^2}=$$

$$\frac{-90(60b-900)-30(1800-90b)}{(60b-900)^{3/2}}=\frac{5400b+81000-54000+2700b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow$$

$$S''(b)=\frac{2700(1-10b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow S''(20)=-3\sqrt{3}<0$$

Luego es un máximo.

Problema 27 Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

Sean los números x e y tenemos que $P=x\cdot y$, y sabemos que $x+y^2=48\Longrightarrow x=48-y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y)=y(48-y^2)=48y-y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y)=0$.

$P'(y)=48-3y^2=0\Longrightarrow y^2=16\Longrightarrow y=4,\ y=-4$ con ambas tenemos que $x=32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

$P''(x)=-6y\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}P''(-4)=24\\P''(4)=-24\end{array}\right.\Longrightarrow$ cuando $y=-4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y=4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x=32$ e $y=4$.

Problema 28 Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi\, m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30\, euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45\, euros/m^2$.

1. Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.
2. ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.
3. ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.

Solución:

1. Sabemos que

   $V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \dfrac{81}{r^2}$

   $C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \dfrac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$

2. Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

   $$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$
   $$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\, m,\ h = 9\, m$$

   Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

   $$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

   Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

3. El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3} r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros$.

Problema 29 Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \Longleftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2-4x+16)\sqrt{x^2-4x+16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

Problema 30 A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la base de la caja es un cuadrado de lado $60-2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60-2x)^2 \cdot x = (3600 + 4x^2 - 240x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Longrightarrow x = 30, \; x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 480 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{array} \right.$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

Problema 31 Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Solución:

Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
La suma de los perímetros será $4x + 12x + 4y = 1248 \Longrightarrow y = 312 - 4x$ El área del primer cuadrado es x^2
El área del segundo cuadrado es $9x^2$
El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312 - 4x)^2$
La función suma de áreas que hay que minimizar será

$$S(x) = x^2 + 9x^2 + (312 - 4x)^2 = 26x^2 - 2496x + 97344$$

Para calcular el mínimo derivamos

$$S'(x) = 52x - 2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

Las dimensiones de los campos son:

El primer campo tiene de lado $48m$
El segundo campo tiene de lado $144m$
El tercer campo tiene de lado $120m$

Problema 32 Representa gráficamente la curva $y = x + \dfrac{1}{x}$. Para ello calcula asíntotas, puntos criticos e intervalos de crecimiento.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$$

     La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$$

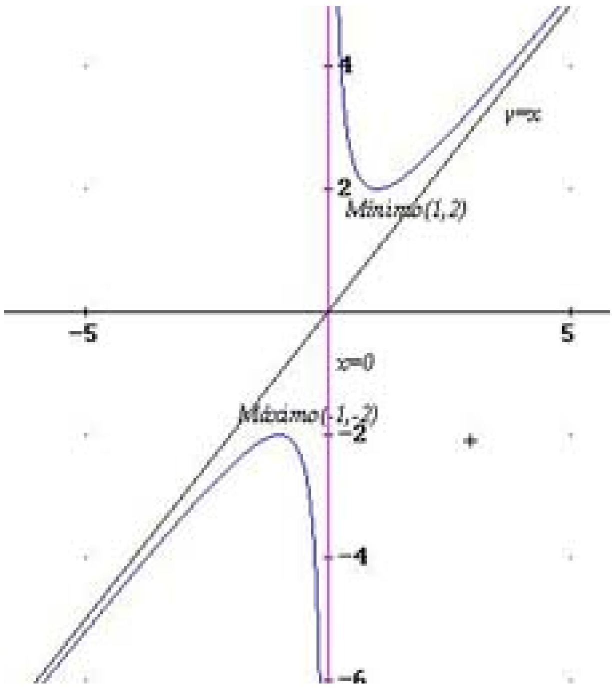
     Luego no hay asíntotas horizontales.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x \right) = 0$$

Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.



2. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Que serían los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo, el estudio del signo se reduce al de $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(-1, -2)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(1, 2)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

Problema 33 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

1. Calcular el dominio de f y puntos de corte si los hay.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Simetrías.
4. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R$.

   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

     $$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = -1$$

     Luego los puntos de corte son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1$, luego el punto de corte es $(0, -1)$.

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No hay ningún valor que anule el denominador de esta fracción y, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$$

Luego la función es simétrica respecto al eje OY.

4. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

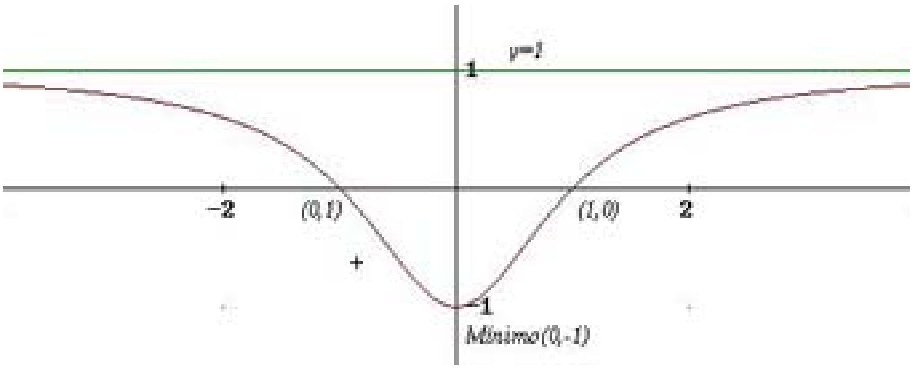
$$\Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \; f(0) = -1$$

Sólo queda por decidir si el punto $(0, -1)$ es un máximo o un mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $4x$, que es positivo cuando $x > 0$, y por el contrario, es negativo cuando $x < 0$. En conclusión:
Cuando $x < 0$ la función es decreciente.
Cuando $x > 0$ la función es creciente.
En el punto $(0, -1)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.



5. Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

Problema 34 Resolver:

1. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.
2. Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

1. El dominio de $y = e^{x+2}$ y $y = e^{-x}$ es todo R y, por tanto, no tienen asíntotas verticales; además son continuas y positivas. Por otro lado tenemos:

   - $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{x+2} = e^{-\infty} = 0$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{x+2} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$
   - $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

   Es decir, las dos funciones tienen una asíntota horizontal en común $y = 0$ y, por tanto, no tienen asíntotas oblicuas.

   Los puntos de corte entre estas dos funciones serán el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, e)$$

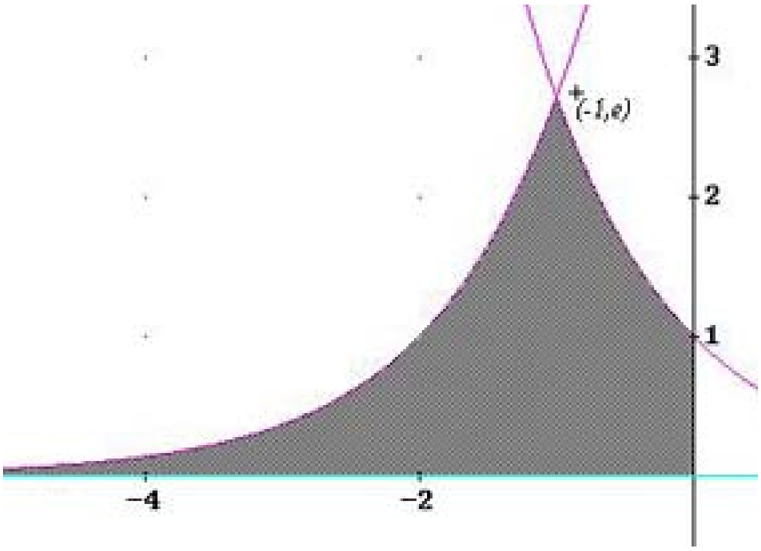
   Los puntos de corte entre la función $y = e^{x+2}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, e^2)$$

Los puntos de corte entre la función $y = e^{-x}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y = e^{-x} \\ x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow (0, 1)$$

El área pedida vendrá dada por



$$\int_{-\infty}^{-1} e^{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\cdot e^{2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx =$$

$$e^2\,[e^x]_{-\infty}^{-1} + [-e^{-x}]_{-1}^{0} = e^2(e^{-1} - 0) + (-e^0 + e) = 2e - 1$$

Problema 35 Dada la función $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$, se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1.
   - **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $5 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.
   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

   $$x\sqrt{5 - x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow$$

   $$x = 0,\ \ x = \sqrt{5},\ \ x = -\sqrt{5}$$

   Luego los puntos de corte son $(0, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

- **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego el punto de corte es $(0, 0)$.
- **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{5 - (-x)^2} = -f(x)$$

Luego la función es simétrica respecto al origen O.
- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$$

Sólo queda por decidir si estos puntos son máximos o mínimos, lo cual se verá en el siguiente apartado.
- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

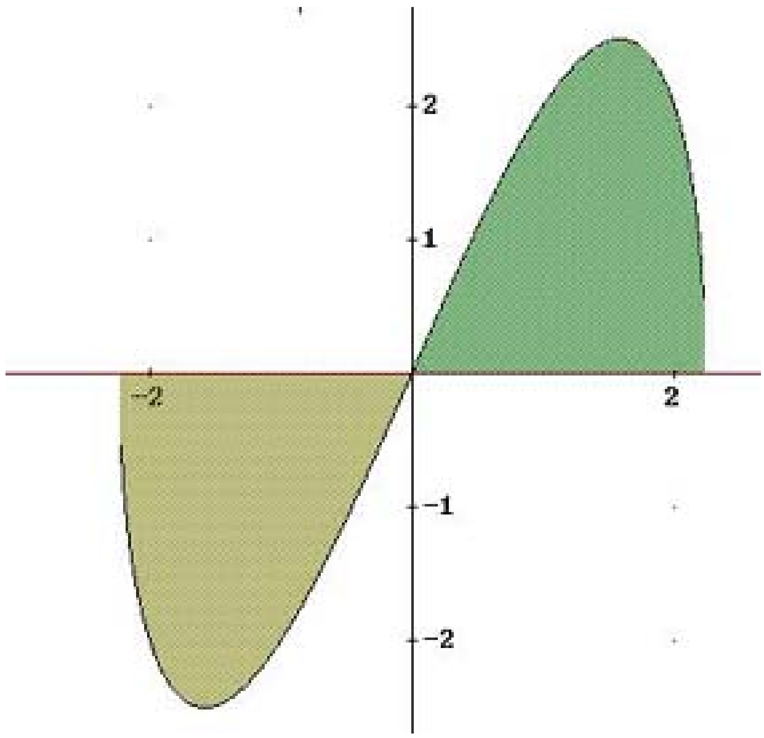
Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right),$$

En conclusión:
Cuando $x \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ la función es decreciente
En el punto $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

En el punto $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo.

- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



2. Como la gráfica es simétrica respecto al origen el área buscada será el doble de la encerrada en el intervalo $[0, \sqrt{5}]$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} 2x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(5-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{125}}{3}$$

Podemos concluir: **Área**$= \dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{3}\ u^2$

Problema 36 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2-1$, $y = 11-x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Solución:

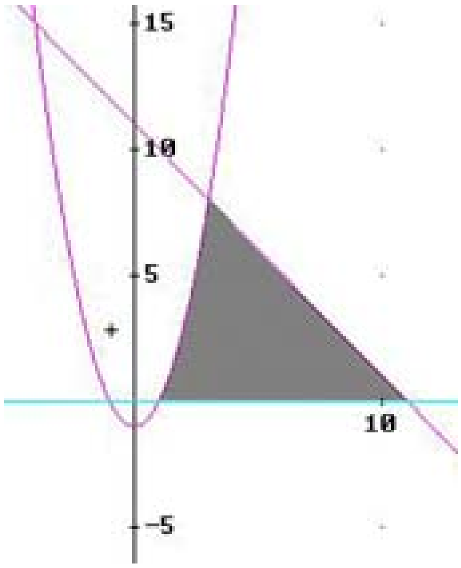
Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2-1 \\ y = 11-x \end{array}\right. \Longrightarrow x^2-1 = 11-x \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3,8) \\ (-4,15) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (1,0) \\ (-1,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 11 - x \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow (11,0)$$

El recinto pedido estará encerrado entre los puntos $(1,0)$, $(3,8)$ y $(11,0)$.



Luego el área será:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\,dx + \int_3^{11} (11 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 + \left[11x - \frac{x^2}{2}\right]_3^{11}$$

Luego $A = \dfrac{116}{3}\ u^2$

Problema 37 Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x}\,dx$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)$$

Empleamos el método de descomposición polinómica

$$\frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$

$$\frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \Longrightarrow$$

$$x+1=A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

Dando valores a x tenemos:

Si $x=0 \Longrightarrow 1=-6A \Longrightarrow A=-\dfrac{1}{6}$

Si $x=2 \Longrightarrow 3=10B \Longrightarrow B=\dfrac{3}{10}$

Si $x=-3 \Longrightarrow -2=15C \Longrightarrow C=-\dfrac{2}{15}$

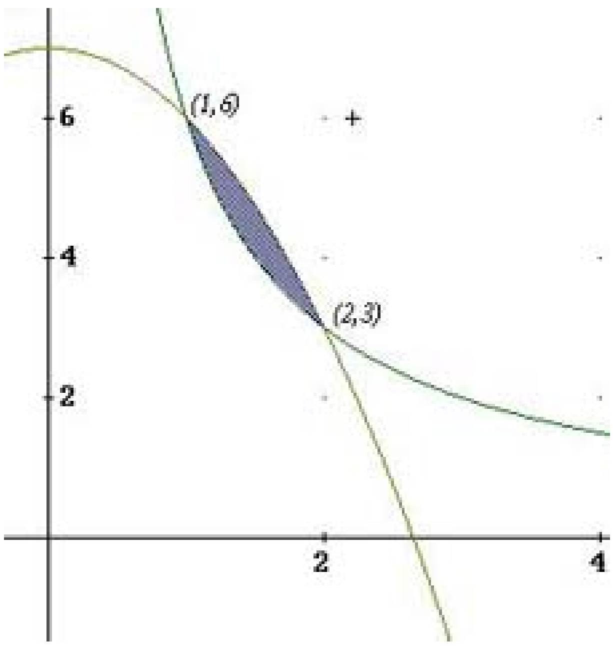
Sustituyendo estos valores en la integral tenemos

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx=\int \frac{-1/6}{x}\,dx+\int \frac{3/10}{x-2}\,dx+\int \frac{-2/15}{x+3}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+K$$

Problema 38 Calcula el área que tiene el único recinto cerrado y limitado por las gráficas de las funciones $y=-x^2+7$ e $y=\dfrac{6}{x}$ (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y=-x^2+7 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow -x^2+7=\frac{6}{x} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,6) \\ (2,3) \\ (-3,-2) \end{array}\right.$$

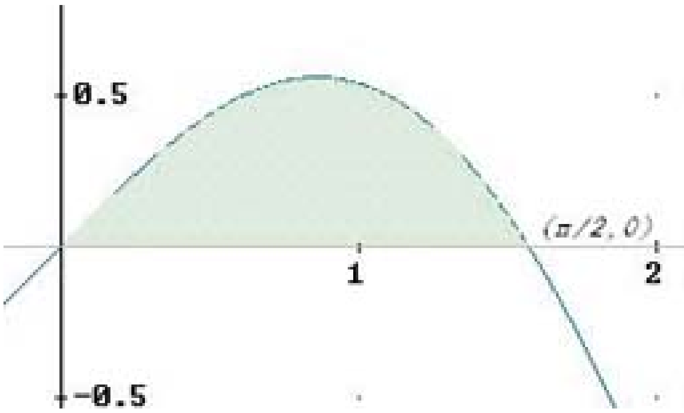
El recinto está comprendido entre los puntos $(1,6)$ y el $(2,3)$.

$$A=\int_1^2\left(-x^2+7-\frac{6}{x}\right)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+7x-6\ln|x|\right]_1^2=\frac{14}{3}-6\ln 2\ u^2$$

Problema 39 La gráfica de la curva $y=x\cos x$, cuando $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, y el eje OX limitan una superficie. Determinar el área de esa superficie.

Solución:

La función $y=x\cos x$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ es positiva, luego el área



que buscamos es

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\ dx$$

que vamos a resolver por partes

$$\left\{\begin{array}{l}u=x\\ dv=\cos x\,dx\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}du=dx\\ v=\sin x\end{array}\right.$$

$$\int x\cos x\ dx=x\sin x-\int\sin x\ dx=x\sin x+\cos x+C$$

Luego

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\ dx=[x\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1\ u^2$$

Problema 40 Calcular integrando por partes, el valor de:

$$\int_1^2 x^2\ln x\ dx$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2\,dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right.$$

$$\int x^2 \ln x\; dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{1}{3}x^2\; dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3$$

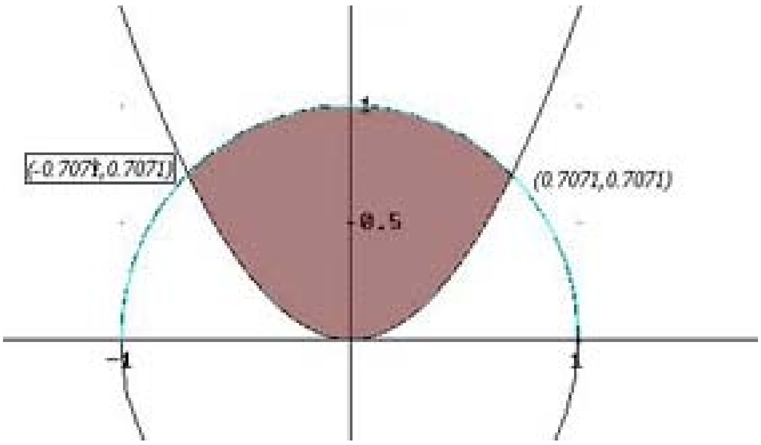
Luego

$$\int_1^2 x^2 \ln x\; dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

Problema 41 Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Luego el punto buscado es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\; dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}\; dx$$

Calculamos las dos integrales independientemente.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\, x^2 \; dx = \left[\sqrt{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Para resolver la segunda integral hacemos un cambio de variable

$$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t \; dt$$

Los nuevos límites de integración serán

Si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Si $x = 1 = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. Luego

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2} \; dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \; \cos t \; dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \; dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \; dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$$

Problema 42 Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución:

- **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Como $x = 1 - \sqrt{2}$ no pertenece al dominio, resulta que el único extremo es $x = 1 + \sqrt{2}$. Sólo queda por decidir si este punto es máximo o mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$(-\infty, -1)\,,\ \left(1, 1 + \sqrt{2}\right),\ \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right),$$

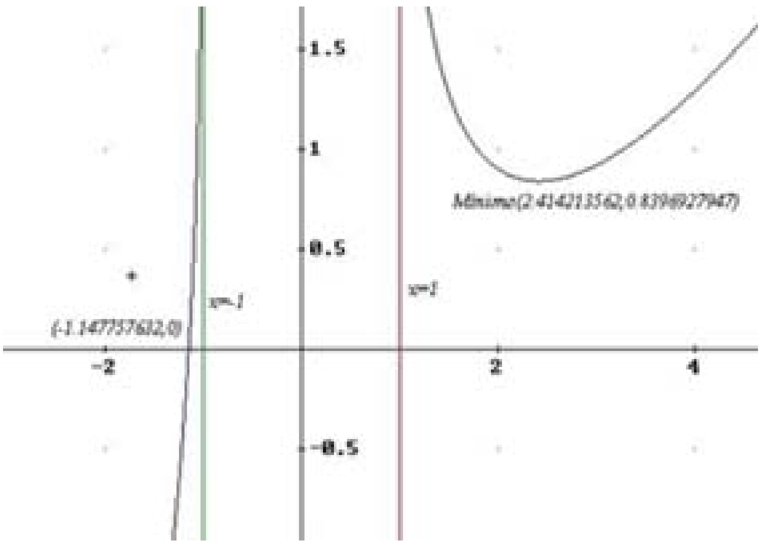
En conclusión:
Cuando $x \in (-\infty, -1)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(1 + \sqrt{2}, \infty\right)$ la función es creciente
En el punto $(1 + \sqrt{2}; 0.84)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

- **Concavidad:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$$

Como la segunda derivada es siempre mayor que cero, la función es siempre cóncava.

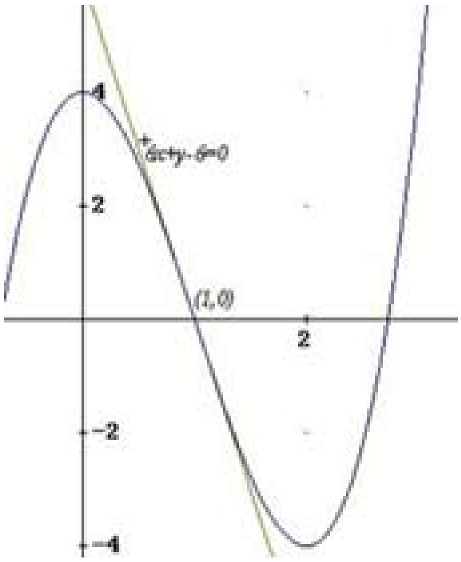
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



Problema 43 Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haga también su gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

Solución:

Para calcular el punto de inflexión tenemos que hacer $f''(x) = 0$.



$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ posible punto de inflexión. $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow$ podemos asegurar que es de inflexión, que será el $(1, 0)$. La pendiente de la recta tangente a esta función een este punto vale $m = f'(1) = -6$, luego la ecuación de la recta buscada es

$$y - 0 = -6(x - 1) \Longrightarrow 6x + y - 6 = 0$$

En un entorno de este punto la función pasará de cóncava a convexa o recíprocamente, habrá que ver también si en ese pequeño entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la función es creciente.

	$(1-\varepsilon, 1)$	$(1, 1+\varepsilon)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente	decreciente

	$(1-\varepsilon, 1)$	1	$(1, 1+\varepsilon)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexa	PI	cóncava

Con estos datos se puede dibujar la gráfica.

Problema 44 Calcular los siguientes límites (donde ”ln significa logaritmo neperiano).

1. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{3\cos(3x)\cos(2x) - 2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

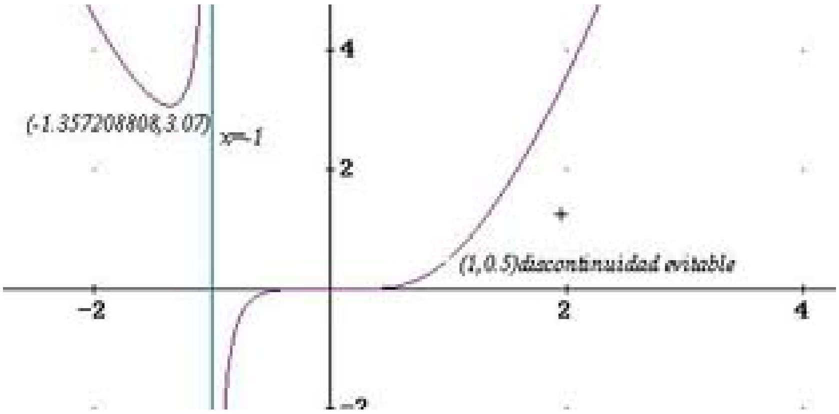
$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{8}$$

Problema 45 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

1. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

2. Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.



Solución:

1. Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

2. Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 46 .

1. Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

2. Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

3. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

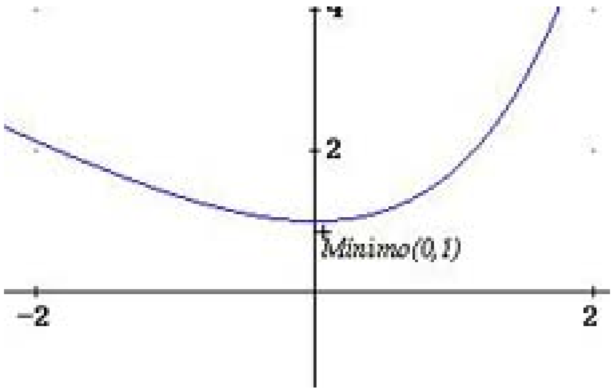
1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.



2.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

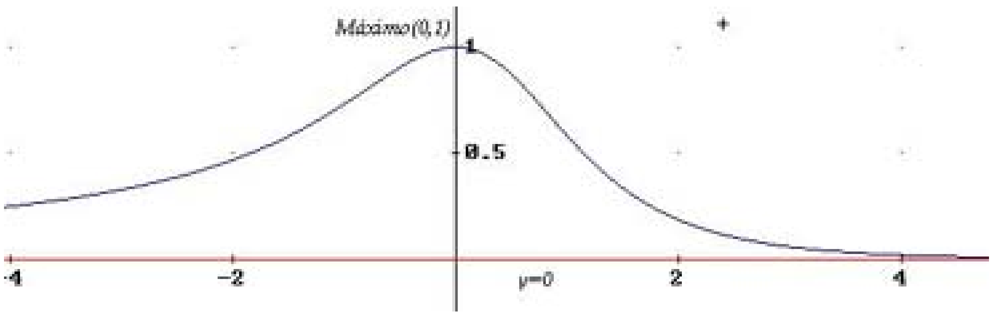
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

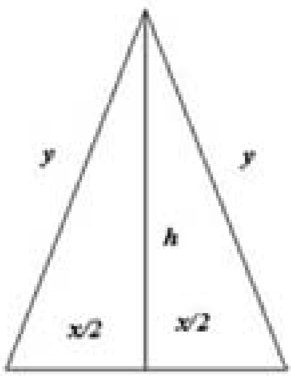
En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3.
$$f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^3} = 0 \Longrightarrow 1-e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$f''(x) = \frac{e^{2x}+e^x(x-4)+2}{(e^x-x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$
Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.



Problema 47 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot y}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88 + 21x}{16(4 - x)\sqrt{4 - x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 48 Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$$

1. (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
2. (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$

Solución:

1. (a) **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
   - **Horizontales:**

   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

   - **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

   (b) Extremos:

   $$f'(x) = \frac{4(2x - 1)(2x + 1)}{(4x^2 + 1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1/2, 08$	$-$	$+$	$+$
$x - 1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$