Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2004) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*.Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x+ & y- & z= & 2 \\ x+ & y+ & 2z= & 5 \\ -x+ & & (m+2)z= & 3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de m.

b) Resolver el sistema para $m = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array} \right), \quad |A| = m - 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Podemos observar que la tercera fila es la resta de la segunda menos la primera, por lo que Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

b) Cuando $m = 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{array} \right|}{2} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2} = 8$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

Problema 2 *(3 puntos)*.Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Esbozar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$Dom(f) = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Luego la función decrece en el intervalo $(-1,0)\cup(0,1)$.

La función tiene un mäximo en el punto $(-1,-2)$ y tiene un mínimo en el punto $(1,2)$.

b)

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

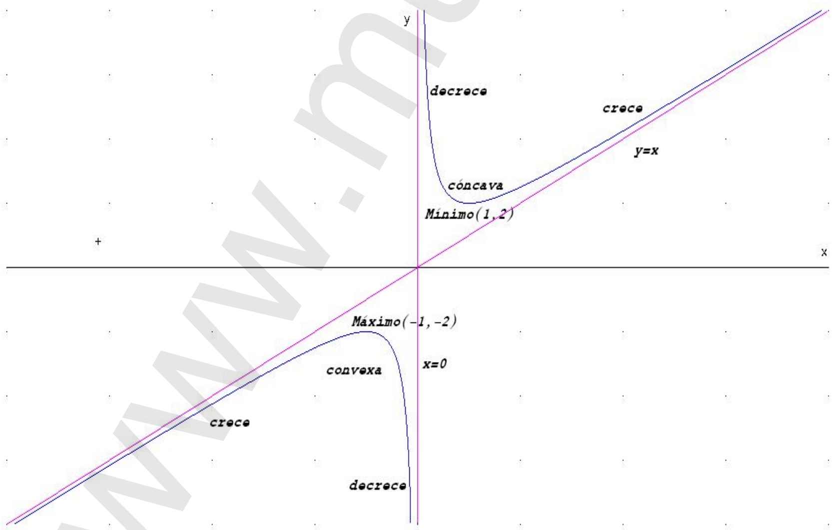
Como $f''(x) \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

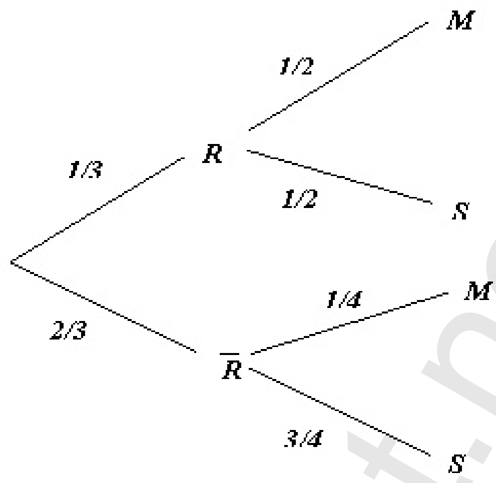
c) Para dibujar la gráfica vamo a calcular las asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$
- Horizontales:
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$
No hay asíntotas horizontales.
- Oblicuas: $y = mx + n$.
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = 0$$
La ecuación de la asíntota es $y = x$

d) Representación gráfica:



Problema 3 *(2 puntos).* Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es de 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es de 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿Cuál es la probabilidad de no haberlo regado?.



Solución:

$$P(\overline{R}|S)=\frac{P(S|\overline{R})P(\overline{R})}{P(S)}=\frac{3/4\cdot 2/3}{1/3\cdot 1/2+2/3\cdot 3/4}=\frac{3}{4}=0,75$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral, para muestras de tamaño n?.

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

Solución:

a) La distribución será $N\left(400,\dfrac{250}{\sqrt{n}}\right)$

b) La distribución será $N\left(400,\dfrac{250}{\sqrt{25}}\right)=N\left(400,50\right)$.

$$P(350<\overline{x}<450)=P\left(\frac{350-400}{50}<Z<\frac{350-400}{50}\right)=P(-1<Z<1)$$

$$=P(Z<1)-P(-1<Z)=2P(z<1)-1=0,6826$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coordinador2004) Selectividad-Opción B

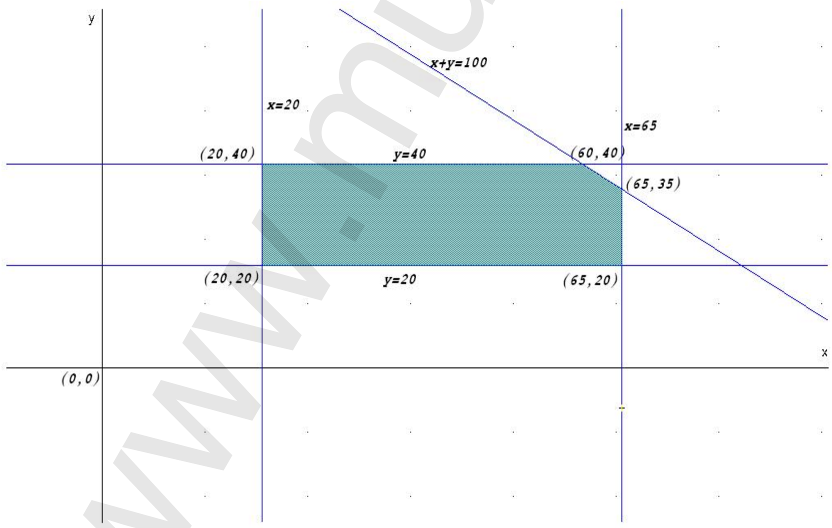
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos).*Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del curso básico y entre 20 y 40 estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es 100. Los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estiman en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.

Solución:

Sea x el número de alumnos en el curso básico.

Sea y el número de alumnos en el curso avanzado.



Máx $z(x,y) = 145x + 150y$ sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \le 100 \\ 20 \le x \le 65 \\ 20 \le y \le 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(20,20) = 5900 \\ z(20,40) = 8900 \\ z(60,40) = 14700 \\ z(65,35) = 14675 \\ z(65,20) = 12425 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{el máximo beneficio se}$$

produce cuando hay 60 alumnos en el curso básico y 40 alumnos en el avanzado, y asciende a 14700 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln x$$

a) Calcular el valor del parámetro real a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 1$. Clasificar el extremo.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $a = 3$.

c) Hallar las asíntotas.

Observación: La notación ln representa logarítmo neperiano.

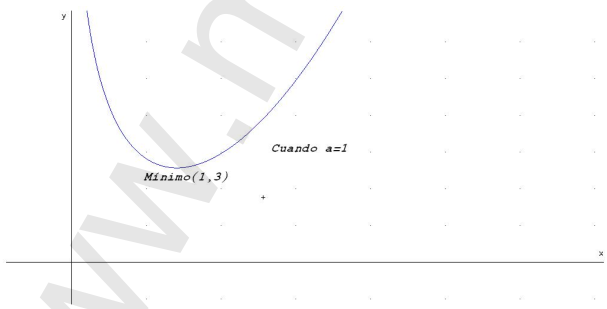
Solución:

a)

$$f'(x) = 2 + 2ax - \frac{4}{x}, \quad \text{como } f'(1) = 0 \Longrightarrow 2 + 2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 2 + 2x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = -2$$

Como $x = -2$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 1$:



	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(1,\infty)$).

Luego la función decrece en el intervalo $(0,1)$.

La función tiene un mínimo en el punto $(1,3)$.

b) Si $a = 3 \Longrightarrow f(x) = 2x + 3x^2 - 4\ln x$

$$f'(x) = 2 + 6x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ \ x = \frac{2}{3}$$

Como $x = -1$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 2/3$:

	$(0, 2/3)$	$(2/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(2/3, \infty))$.

Luego la función decrece en el intervalo $(0, 2/3)$.

c) Ásíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}(2x+3x^2-4\ln x) = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}(2x+3x^2-4\ln x) = \text{No existe}$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

- Oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x + 3x^2 - 4\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty$$

No hay asíntotas oblicuas.

Problema 3 *(2 puntos)* Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,7, \quad P(B) = 0,5 \quad P(A\cap B) = 0,45$$

Calcular:

a) $P(B|A)$

b) $P(A^c \cap B^c)$

Nota: A^c representa el suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,45}{0,7} = 0.6428571428$$

b)

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,45 = 0,75$$

Problema 4 *(2 puntos)*.El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio, con un nivel de confianza del 95%. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la mustra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 6 euros.

Solución:

Tenemos $N(\mu, 15)$ y $z_{\alpha/2} = 1.96 \Longrightarrow$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 6 = 1.96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 96,04 \Longrightarrow n = 97$$