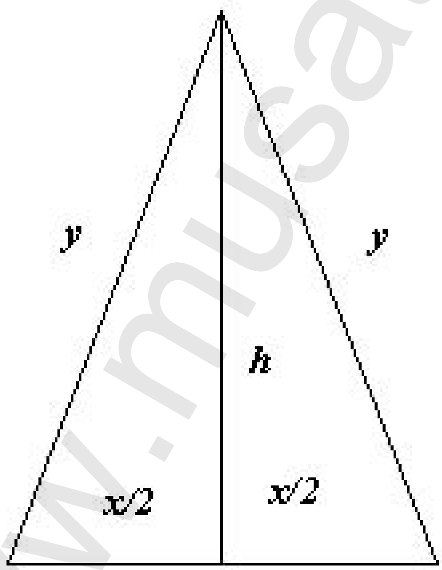
Examen de Matemáticas II (Junio 2004)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

a) (a) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

(b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$x+1/2$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right) dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\, dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0 \\ x- & (1+a)y+ & z=0 \\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -a-3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$ y como el sistema es homogeneo resultaría que es compatible determinado. la solución en este caso sería $x = y = z = 0$.

Si $a = -3$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$ y como el sistema es homogeneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y+ & 4z=0 \\ x+ & 2y+ & z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y= & -4z \\ x+ & 2y= & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{array} \right. ; \quad \pi_1 : 2 - 3x + 2y - z = 0; \quad \pi_2 : 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Solución:

a)

$$r : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4 = -3y + 3 \\ -x + 2 = -3z + 12 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1 : 3x - 2y + z - 2 = 0$, y tenemos:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{array} \right); \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que $|A| = -4 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ La recta corta al plano π_1.

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2 : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$, y tenemos:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{array} \right); \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ y como $\left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Por otra parte tenemos que

$$\left| \begin{array}{rrr} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{array} \right| = 36 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{2}{2} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

c) Un punto de r es $P_r(2, 1, 4)$ y tendremos:

$$d(P_r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$