Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Diciembre 2003

Problema 1 *(2 puntos)*Calcular el dominio de

1.
$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{x-1}$$

2.
$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$$

Solución

1.
$$x + 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -1$$
$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow$$
$\text{Dom} f(x) = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2.
$$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$$
$$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2, \ \ x = -2$$
$\text{Dom} f(x) = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Problema 2 *(2 puntos)*Calcular los valores del parámetro a para que la siguiente función sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-a)^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - 1) = a - 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} [(x-a)^2 - 3] = (1-a)^2 - 4$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ se tiene que cumplir que

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$a - 1 = (1-a)^2 - 3 \Longrightarrow a^2 - 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = 1$$

Problema 3 *(2 puntos)*

1. Calcular la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$$

en $x = 0$

2. Calcular los máximos y los mínimos de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1$$

$$f(0) = -1 \Longrightarrow y + 1 = -(x - 0) \Longrightarrow x + y + 1 = 0$$

2.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ x = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Tenemos por tanto que

$f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, f(1)) = (1, 2)$ es un Mínimo.

$f''(-1) = -2 < 0 \Longrightarrow (-1, f(-1)) = (-1, -2)$ es un Máximo.

Problema 4 *(2 puntos)*Hallar los valores de los parámetros a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ bx^3 - a & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en R.

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} (ax^2 - bx + 2) = a + b + 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1}(bx^3 - a) = -b - a$$

$$a + b + 2 = -b - a \Longrightarrow a + b + 1 = 0$$

Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - b & \text{si} \quad x < -1 \\ 3bx^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

$$f'(-1^-) = -2a - b, \;\; f'(-1^+) = 3b \Longrightarrow -2a - b = 3b \Longrightarrow a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2} & \text{si} & x < 0 \\ \frac{4x-1}{2} & \text{si} & 0 < x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si} & x \geq 4 \end{cases}$$

Solución:

En $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4x - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} \neq f(0)$$

Podemos concluir con que en $x = 0$ la función tiene una discontinuidad evitable.

En $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{4x - 1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x + 1}{x - 1} = -\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x)$$

Podemos concluir con que en $x = 4$ la función tiene una discontinuidad inevitable.