Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Marzo 2003

Problema 1 *(3 puntos)*Sea el plano $\pi : x - 2y - z + 1 = 0$
Hallar:

1. El punto simétrico P' de $P(1,3,2)$ y el punto simétrico Q' de $Q(4,0,-1)$ respecto de π.

2. La recta simétrica de la recta que une a los puntos P y Q respecto del plano π.

Solución:

1. Para calcular el punto P' simétrico de P calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por P, sea r dicha recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \quad t \\ y = 3 - \quad 2t \\ z = 2 - \quad t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de r y π hacemos
$(1+t) - 2(3-2t) - (2-t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow P''(0,5,3)$
P'' es el punto medio entre P y P', luego

$$P'' = \frac{P' + P}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = 2(0,5,3) - (1,3,2) = (-1,7,4)$$

Para calcular el punto Q' simétrico de Q calculamos una recta perpendicular al plano π y que pase por Q, sea s dicha recta

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = \quad 4 + \quad t \\ y = \quad\quad - \quad 2t \\ z = \quad -1 - \quad t \end{array} \right.$$

Para calcular el punto de corte de s y π hacemos
$(4+t) - 2(-2t) - (-1-t) + 1 = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow Q''(3,2,0)$
Q'' es el punto medio entre Q y Q', luego

$$Q'' = \frac{Q' + Q}{2} \Longrightarrow Q' = 2Q'' - Q = 2(3,2,0) - (4,0,-1) = (2,4,1)$$

2. La recta que buscamos une los puntos P' y Q' y pasa por ambos puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P'Q'} = (3,-3,-3) \\ P'(-1,7,4) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 3t \\ y = \quad 7 - 3t \\ z = \quad 4 - 3t \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-4}{-3}$$

Problema 2 *(3 puntos)*

1. Calcula el área de un triángulo de vértices $A(1,1,2)$, $B(1,0,-1)$ y $C(1,-3,2)$.
2. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x+y-z+6=0$ con la recta $s : \dfrac{x}{3} = y-2 = z+1$ y es paralela a la recta
$$\begin{cases} 3x + \ \ y \qquad -4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

1.
$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,-3); \quad \overrightarrow{AC} = (0,-4,0)$$
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}| = |(-12,0,0)| = 12$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{12}{2} = 6$$

2. Calculamos la intersección de π y la recta s:
$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases} \Longrightarrow 3t+2+t-(-1+t)+6 = 0 \Longrightarrow t = -3 \Longrightarrow P(-9,-1,-4)$$
La recta pedida pasará por este punto y tendrá como vector director
$$\overrightarrow{u} = (3,1,0) \times (4,-3,1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-13)$$
La recta pedida es
$$x+9 = \frac{x+1}{-3} = \frac{z+4}{13}$$

Problema 3 *(4 puntos)*Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.
$$\begin{cases} \pi_1 : & x- & y+ & z = & 0 \\ \pi_2 : & & ay+ & 2z = & 4 \\ \pi_3 : & & 2y+ & az = & 4 \end{cases}$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array} \right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = 2, \;\; a = -2$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ tendremos que $|A| = 0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a = 2$ tendremos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $= 2 <$n$^{\text{o}}$ incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a = -2$ tendremos:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Primero tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que Rango$(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.