Examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Selectividad-Opción A (Septiembre 2004)
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \\ x+ & my- & mz = & 1 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sitema según los diferentes valores del parámetro m.
2. Resuélvase el sitema para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2m^2+2m+4 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $m = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
Tenemos que $|A| = 0$ y que $\left|\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) =$ 2. Y tenemos que $\left|\begin{array}{rrr} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$. Luego en este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
- Si $m = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
Observamos que la tercera fila es la suma de las dos primeras y por tanto Rango$(\overline{A}) = 2$. Como $|A| = 0$ y que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego en este caso Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A})$ <n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2. Cuando $m = 2$ el sistema es Compatible Indeterminado, luego tendrá infinitas soluciones. Para resolverlo eliminamos la tercera ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y = & 5+ & 3z \\ -x+ & y = & -4- & z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 + \dfrac{4}{3}t \\ y = -1 + \dfrac{1}{3}t \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0$$

1. Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

2. Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 3, \;\; a = -\dfrac{1}{2}$

2. $f(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 6x + 5 \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 5, \;\; x = 1$

$$f''(x) = 2x - 6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(5) = 4 > 0 \Longrightarrow \left(5, \dfrac{5}{3}\right) \text{ Mínimo} \\ f''(1) = -4 < 0 \Longrightarrow \left(1, \dfrac{37}{3}\right) \text{ Máximo} \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Una cierta instalación de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es $0,95$ y de que se active el segundo es $0,90$.

1. Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores.

2. Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Solución:

LLamamos $A = \{\text{se enciende el indicador } 1^{o}\}$, $P(A) = 0,95$, $P(\overline{A}) = 0,05$
LLamamos $B = \{\text{se enciende el indicador } 2^{o}\}$, $P(B) = 0,90$, $P(\overline{B}) = 0,10$

1. $P(\text{se enciende uno sólo}) = P(A\cap\overline{B}) + P(B\cap\overline{A}) = 0,95\cdot 0,10 + 0,05\cdot 0,90 = 0,14$

2. $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - 0,05\cdot 0,10 = 0,995$

Problema 4 *(2 puntos)* Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos 88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89.

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

$$\overline{x} = \frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9} = 89, \ \ n = 9, \ \ \sigma = 1,8$$

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(89 - 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}};\ 89 + 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C. = (87,824;\ 90,176)$$