Examen de Matemáticas II (Septiembre 2004)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.
2. (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

1. $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$
2. $A = BX \Longrightarrow B^{-1}A = B^1BX \Longrightarrow B^{-1}A = X$
$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos)

1. (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?
2. (1 punto) Calcular un número k tal que:
$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

2.

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2-6k+5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} k^2-6k+5=0 \\ 8(k-1)=0 \\ 2-2k=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k=1$$

Problema 3 (3 puntos) Sea el plano $\pi : x+2y+3z=6$.

1. (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.
2. (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.
3. (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

1. Calculo r, recta perpendicular a π que pasa por $P(0,0,0)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{array}\right.$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'':

$$t+2(2t)+3(3t)=6 \Longrightarrow t=\frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{9}{7}\right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'', es decir:

$$P''=\frac{P+P'}{2} \Longrightarrow P'=2P''-P=\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7},\frac{18}{7}\right)$$

El punto simétrico de $P(0,0,0)$ respecto al plano π es $P'\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7},\frac{18}{7}\right)$.

2.

$$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u} = (0,0,1) \\ O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x-y=0$$

3. Los puntos de corte de π con los ejes será:

   Corte con el eje OX: $y=0,\ z=0 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
   Corte con el eje OY: $x=0,\ z=0 \Longrightarrow y=3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
   Corte con el eje OZ: $x=0,\ y=0 \Longrightarrow z=2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

   Tendremos: $\overrightarrow{OA}=(6,0,0),\ \overrightarrow{OB}=(0,3,0),\ \overrightarrow{OC}=(0,0,2)$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right| = 6\,u^3$$

Problema 4 (3 puntos) Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$$

1. (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
3. (1 punto) ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)=0 \Longrightarrow x=4,\ \ x=1,\ \ x=7$$

   Como $(x-4)^2>0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$

	$(-\infty,1)$	$(1,7)$	$(7,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   Luego f crece en los intervalos $(-\infty,1)\cup(7,\infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1,7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x=1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1,\dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x=7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7,-\dfrac{162}{5}\right)$. En $x=4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4,0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

   $$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1,8787, \;\; x = 6,1213$$

   Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

   $$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

   Luego se trata de un punto de inflexión.