Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2004

Problema 1 Dadas la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ y la recta $y = 2x - 3$.

1. Dibujar las gráficas de la parábola y la recta. Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

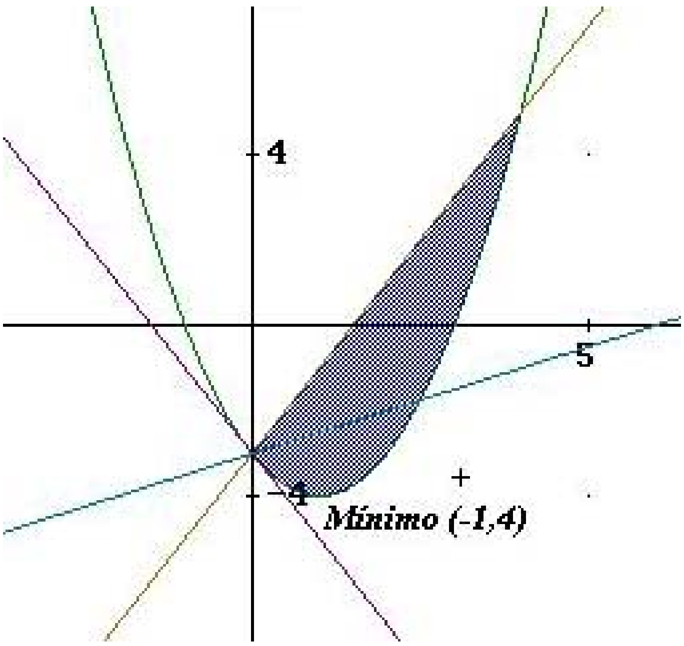
2. Calcula el área del recinto plano señalado.

3. Calcula la recta tangente y normal a esta parábola en el punto de corte con el eje OY.

Solución:

1. Para dibujar la gráfica de la función se observa que el dominio es todo R, y que no tiene simetrías ni asíntotas.

   Estudiamos los puntos de corte:



$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3 \Longrightarrow (0, -3)$$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (-1, 0) \\ (3, 0) \end{array} \right.$$

Estudiamos sus extremos:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1, -4)$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, -4) \text{ es un mínimo}$$

Con estos datos tenemos suficiente información para dibujar la gráfica de esta función.

Para dibujar la recta $y = 2x - 3$ nos basta con conacer dos puntos, sean éstos el $(0, -3)$ y el $(1, -1)$ por ejemplo.

2. Calculamos los puntos de corte entre la parábola y la recta

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{array}\right. \Longrightarrow x = 0, \quad x = 4$$

$$S = \int_0^4 (2x - 3 - (x^2 - 2x - 3))\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3}$$

3. El punto de corte con el eje OY tiene que tener de abcisa $x = 0$, es decir, en el punto $(0, -3)$ tendremos:

$$m = f'(0) = -2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + 3 = -2x \text{ recta tangente} \\ y + 3 = \dfrac{1}{2}x \text{ recta normal} \end{array}\right.$$

Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} ax^2 - bx - 1 & \text{si} & x \leq 0 \\ \dfrac{ax - b}{e^x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

Calcular a y b para que esta función sea continua y derivable en $x = 0$.

Solución:

- Para que la función sea continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (ax^2 - bx - 1) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{ax - b}{e^x} = -b \end{array}\right\} \Longrightarrow -1 = -b \Longrightarrow b = 1$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{rcl} 2ax - b & \text{si} & x \leq 0 \\ \dfrac{a + b - ax}{e^x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(0^+) = f'(0^-)$:

$$a + b = -b \Longrightarrow a = -2$$

Problema 3 Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

- Dominio: $R - \{-3, 2\}$
- Puntos de Corte:
  1. Con el eje OX: $\dfrac{x^2}{x^2+x-6} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

     Con el eje OY: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - x - 6} = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 6} \Longrightarrow$ Ni es par ni impar.
- Asíntotas:
  1. Verticales:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} \dfrac{x^2}{x^2+x-6} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+} \dfrac{x^2}{x^2+x-6} = -\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -3$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x^2}{x^2+x-6} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 2$$

  2. Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x-6} = 1$$

     Luego $y = 1$, es una asíntota horizontal
  3. Oblicuas: No las hay, ya que hemos encontrado una asíntota horizontal.
- Extremos relativos:

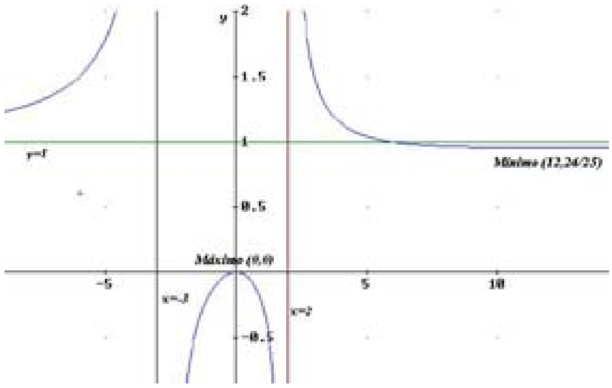
$$f'(x) = \frac{x(x-12)}{(x^2+x-6)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x(x-12) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 12$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 12)$	$(12, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x - 12$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

- En $x = 0$ tenemos el punto $(0, 0)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

  En $x = 12$ tenemos el punto $(12, 24/25)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.



Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-7}\,dx$

2. $\displaystyle\int \ln(x^2-1)\,dx$

Solución:

1. Hacemos el cambio de variable $t = x^2 + x - 7 \Longrightarrow (2x+1)\,dx = dt \Longrightarrow$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-7}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C = \ln(x^2+x-7) + C$$

2. Resolvemos por partes

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln(x^2-1) \Longrightarrow du = \frac{2x}{x^2-1} \\ \\ dv = dx \Longrightarrow v = \int dx = x \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx =$$

$$= x\ln(x^2-1)-2\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x\ln(x^2-1)-2x-\int\frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

$$= x\ln(x^2-1)-2x-2\left(\int\frac{-1/2}{x+1}+\int\frac{1/2}{x-1}\right) =$$

$$= x\ln(x^2-1)-2x+\ln(x+1)-ln(x-1)+C = x\ln(x^2-1)-2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$