Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Mayo 2003

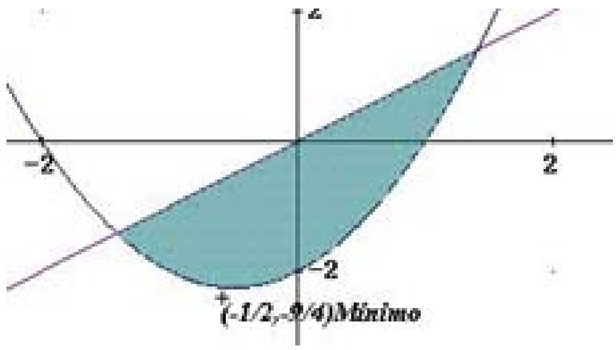
Problema 1 Dadas la parábola $y = x^2 + x - 2$ y la recta $y = x$.

1. Dibujar las gráficas de la parábola y la recta. Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.
2. Calcula el área del recinto plano señalado.
3. Calcula la recta tangente y normal a esta parábola en el punto de corte con el eje OY.

Solución:

1. Para dibujar la gráfica de la función se observa que el dominio es todo R, y que no tiene simetrías ni asíntotas.

   Estudiamos los puntos de corte:



$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2 \Longrightarrow (0, -2)$$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ x = -2 \Longrightarrow \begin{cases} (1, 0) \\ (-2, 0) \end{cases}$$

Estudiamos sus extremos:

$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right) \text{ es un mínimo}$$

Con estos datos tenemos suficiente información para dibujar la gráfica de esta función.

Para dibujar la recta $y = x$ nos basta con conacer dos puntos, sean éstos el $(0, 0)$ y el $(1, 1)$ por ejemplo.

2. Calculamos los puntos de corte entre la parábola y la recta

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 \\ y = x \end{array}\right. \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x - (x^2 + x - 2))\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2)\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

3. El punto de corte con el eje OY tiene que tener de abcisa $x = 0$, es decir, en el punto $(0, -2)$ tendremos:

$$m = f'(0) = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + 2 = x \text{ recta tangente} \\ y + 2 = -x \text{ recta normal} \end{array}\right.$$

Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x + 5 & \text{si} & x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

1. Determina k para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

2. ¿Es la función $f(x)$ para el valor k calculado derivable en $x = 1$?.

Solución:

1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2x - 5) = 7 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2 + k) = 1 + k \end{array}\right\} \Longrightarrow 7 = 1 + k \Longrightarrow k = 6$$

Cuando $k = 6$ se cumple que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 6$ y, por tanto, con ese valor de k, la función es continua.

2. Cuando $k = 6$, la función queda de la siguiente manera

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x + 5 & \text{si} & x \le 1 \\ x^2 + 6 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2 & \text{si} & x \le 1 \\ 2x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(1^+) = f'(1^-)$. comprobamos que, $f'(1^+) = f'(1^-) = 2$, luego la función es derivable en $x = 1$.

Problema 3 Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^3-1}$$

Solución:

- Dominio: $R - \{1\}$
- Puntos de Corte:
  1. Con el eje OX: $\dfrac{(x-1)^3}{x^3-1} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (x-1)^3 = 0 \Longrightarrow x = 1$, pero en $x = 1$ la función no tiene ningún valor, ese punto no pertenece al dominio. Pero $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{(x-1)^3}{x^3-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{3(x-1)^2}{2x^2} = 0$, lo que quiere decir que, en ese punto hay una discontinuidad evitable. Bastaría hacer $f(1) = 0$, para que la función sea continua en (1,0).

     Con el eje OY: $f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$.
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x-1)^2}{(-x)^3-1} = \dfrac{(-x-2)^3}{-x^3-1} \Longrightarrow$ No hay simetrías.
- Asíntotas:
  1. Verticales:

     $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x^3-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{2x^2} = 0$$

     Luego no hay asíntotas vertical.
  2. Horizontales:

     $$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \frac{(x-2)^3}{x^3-1} = 1$$

     Luego $y = 1$, es una asíntota horizontal
  3. Oblicuas: No las hay, ya que hemos encontrado una asíntota horizontal.
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{3x^2-3}{(x^2+x+1)^2}$$

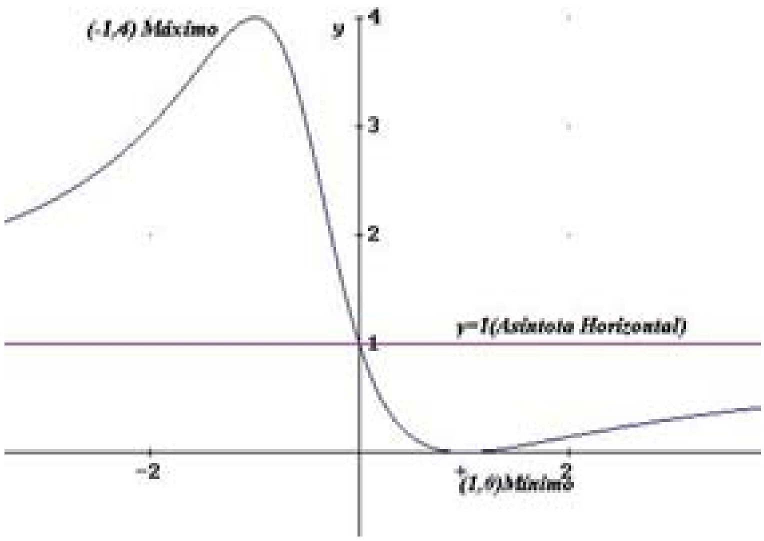
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \; x = -1$$

En $x = 1$, como se ha visto antes la función no es continua, pero si consideramos su discontinuidad evitable podemos estudiar el comportamiento de la función en ese punto como si fuese continua.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

- En $x = -1$ tenemos el punto $(-1, 4)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

  En $x = 3$ tenemos el punto $(1, 0)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.



Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$

2. $\displaystyle\int x \ln(x + 1) \, dx$

Solución:

1. Hacemos el cambio de variable $t = \tan x \Longrightarrow \sec x \, dx = dt \Longrightarrow$

$$\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

2. Resolvemos por partes

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln(x+1) \Longrightarrow du = \frac{1}{x+1} \\ \\ dv = x\,dx \Longrightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int\left((x-1)+\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) = \frac{2(x^2-1)\ln(x+1) - x(x-2)}{4} + C$$