Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Abril 2004

Problema 1 *(5 puntos)*Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

Solución:

- Dominio: $R - \{2\}$
- Puntos de Corte:
  1. Con el eje OX: $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$

     Con el eje OY: $f(0) = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 2(-x) + 1}{(-x) - 2} = -\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 2} \Longrightarrow$ No hay simetrías.
- Asíntotas:
  1. Verticales:
  $$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$
  Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.
  $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
  2. Horizontales:
  $$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \pm\infty$$
  Luego no hay asíntotas horizontales.
  3. Oblicuas:
  $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} = 1$$
  $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$
  Luego la ecuación de la recta $y = x$ es la de una asíntota oblicua.

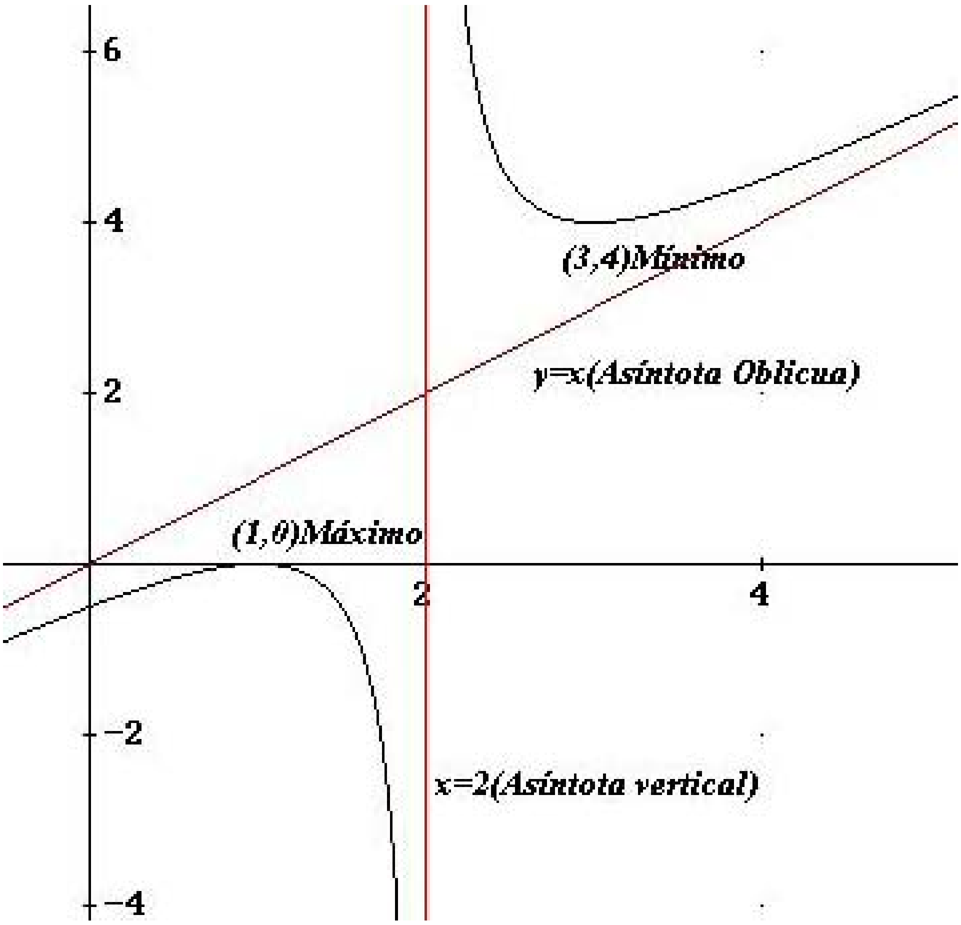
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \; x = 3$$

$$f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow (1, 0) \text{ es un Máximo}$$

$$f''(3) = 2 < 0 \Longrightarrow (3, 4) \text{ es un Mínimo}$$



Problema 2 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 11$, calcular:

1. Pendiente de la tangente a la gráfica de la función, f, en el punto de abcisa $x = 1$.

2. Escribir los intervalos en donde la función f sea creciente y en donde sea decreciente.

3. Determinar los valores de x en los que la función f alcanza un máximo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función en estos puntos?.

Solución:

1.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 \Longrightarrow m = f'(1) = -36$$

2.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

3. En $x = -2$ tenemos el punto $(-2, 55)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

   En $x = 3$ tenemos el punto $(3, -70)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.

Problema 3 *(2 puntos)*Hallar los valores de los parámetros a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & \text{si} \quad x < -1 \\ ax^3 - b & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en R.

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} (x^2 - ax + b) = a + b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} (ax^3 - b) = -a - b$$

$$a + b + 1 = -a - b \Longrightarrow 2a + 2b + 1 = 0$$

Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si} \quad x < -1 \\ 3ax^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

$$f'(-1^-) = -2 - a, \;\; f'(-1^+) = 3a \Longrightarrow -2 - a = 3a \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 2b = -1 \\ \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2} \\ \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(1 puntos)*La suma de dos números es 146, calcularlos sabiendo que si sumamos el cuadrado de uno de ellos más cuatro veces el segundo, esta suma es mínima.

Solución:

Sin un número vale x, el otro vale $146 - x$, luego

$$f(x) = 4(146 - x) + x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ es un Mínimo}$$

La números buscados serán de $x = 2$ y $y = 146 - 2 = 144$, respectivamente.