Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(6 puntos)* Se considera la recta

$$r : \begin{cases} 3x+ & 2y & -z- & 1=0 \\ x+ & y & - & 1=0 \end{cases}$$

Se pide:

1. Determinar la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0,2,2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s.
2. Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y s, y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.
3. Si Q es un punto cualquiera de t, sin hacer ningún cálculo, que relación hay entre las distancias de Q a r, de Q a s y de Q a π.

Solución:

1. Para calcular $\overrightarrow{u_r}$ tenemos:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $P_r(0,1,1)$ y tendremos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & 1+\lambda \end{cases}$$

Un plano perpendicular a r sería $\pi' : x - y + z + \lambda = 0$ que por contener al punto $(0,2,2) \Longrightarrow -2+2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : x-y+z=0$

Buscamos el punto de intersección entre el plano π' y la recta r. Sustituimos r en π'

$$\lambda - (1-\lambda) + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P(0,1,1)$$

La recta s pasa por $P(0,1,1)$ y por $P_s(0,2,2)$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0,1,1) \\ P(0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 0 & \\ y = 1 & +\lambda \\ z = 1 & +\lambda \end{cases}$$

2. Tenemos que π tiene que contener a r y s, y tenemos que

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_r(0, 1, 1) \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (0, 1, 1) \\ P_s(0, 1, 1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x + y - z = 0$$

La recta t es perpendicular π y pasa por el punto $P = P_r = P_s$, luego

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ P_t(0, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t = \left\{ \begin{array}{lll} x = & & 2\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & \lambda \end{array} \right.$$

3. La recta t es perpendicular a r, a s y a π, además los tres se cortan en el punto P, luego si Q es un punto cualquiera de t, tendremos

$$d(Q, r) = d(Q, s) = d(Q, \pi)$$

Problema 2 *(6 puntos)* Sea la ecuación de la recta r determinada por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, -1, -1)$; y sea la recta $s : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$.

Se pide:

1. Averiguar su posición relativa.
2. La distancia que las separa.
3. Perpendicular común a ambas rectas.
4. Hallar, si existe, una recta que pase por el punto $C(1, 2, 4)$ y que corte a r y a s.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ P_s(3, 0, 0) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 0, 1)$, y tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = -4 \neq 0$$

En conclusión Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

2. Calculamos $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3i + 2k = (-3, 0, 2) \Longrightarrow |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \sqrt{13}$$

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |-4| = 4$$

Tenemos, por tanto

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

3. Obtenemos t, la recta perpendicular a r y a s, como intersección de dos planos. Ésta tendrá como vector director

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (-3, 0, 2)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3, 0, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y \\ 2 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - 3z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{u_t} = (-3, 0, 2) \\ P_s(3, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 & x-3 \\ 0 & 5 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 10x - 13y + 15z - 30 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x & - & 3z- & 1 = 0 \\ 10x & -13y+ & 15z- & 30 = 0 \end{array} \right.$$

4. Obtenemos h, la recta que corta a r y a s y pasa por $C(1, 2, 4)$, como intersección de dos planos.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{P_rC} = (0, 2, 5) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 5 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 5, 3) \\ \overrightarrow{P_sC} = (-2, 2, 4) \\ P_s(3, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x-3 \\ 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y + z - 3 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{rrr} x = & 1 & \\ y = & -2 & +\lambda \\ z = & & \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 *(4 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,-1)$, se pide:

1. Obtener la ecuación del plano π que los contiene.
2. Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y el origen de coordenadas O.
3. Calcular la altura del tetraedro que va desde el origen de coordenadas a la cara de vértices ABC.
4. Calcular la altura del triángulo OAB, la que va desde el vétice O al segmento $\overline{AB}$.

Solución:

1. Determinamos

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,2), \quad \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,-2) \\ A(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 0 & -3 & x-2 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + 3y - 5 = 0$$

2.

$$V = \frac{1}{3}(\text{área base}) \cdot \text{altura} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$$

$$\overrightarrow{OA} = (2,1,1), \quad \overrightarrow{OB} = (2,1,3), \quad \overrightarrow{OC} = (-1,2,-1)$$

$$V = \frac{1}{6}| \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right| | = \frac{1}{6}|-10| = \frac{5}{3} = 1,666\, u^3$$

3. Área de la base$= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{array} \right| = (-2,-6,0) \Longrightarrow \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}$$

$$V = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot h \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883\, u$$

$$d(O,\pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1,58113883\, u$$

4. LLamo r a la recta que une AB:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0,0,2) \\ P_r = A(2,1,1) \end{cases}$$

Obtenemos el vector auxiliar $\overrightarrow{OA} = (2,1,1)$ y hacemos

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,4,0)$$

$$d(O,r) = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}\,u$$