Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

(Ciencias Sociales)

Marzo 2004

Problema 1 *(5 puntos)*Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

Solución:

- Dominio: $R - \{2\}$
- Puntos de Corte:
  1. Con el eje OX: $\dfrac{x^2}{2-x} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$

     Con el eje OY: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
- Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{2-(-x)} = \dfrac{x^2}{2+x} \Longrightarrow$ No hay simetrías.
- Asíntotas:
  1. Verticales:
     $$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0}\right] = \pm\infty$$
     Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.
     $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
     $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{2-x} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$
  2. Horizontales:
     $$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2-x} = \pm\infty$$
     Luego no hay asíntotas horizontales.
  3. Oblicuas:
     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = -1$$
     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$$
     Luego la ecuación de la recta $y = -x - 2$ es la de una asíntota oblicua.

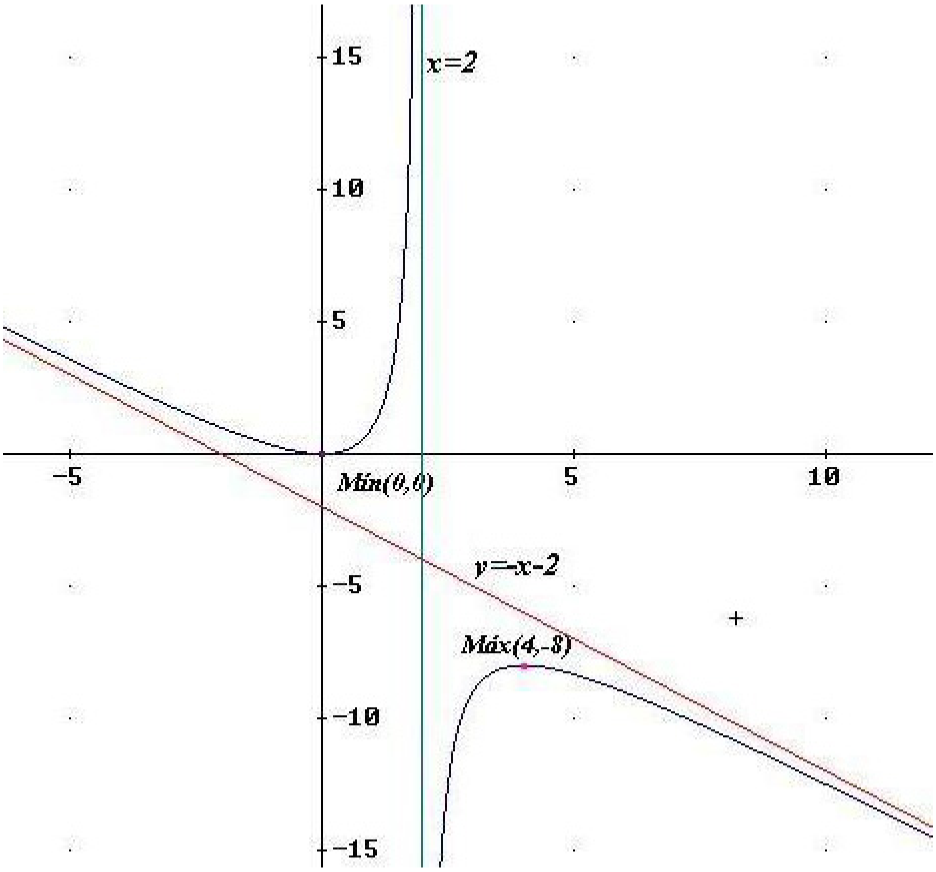
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 4$$

$$f''(0) = 1 > 0 \Longrightarrow (0,0) \text{ es un Mínimo}$$

$$f''(4) = -1 < 0 \Longrightarrow (4,-8) \text{ es un Máximo}$$



Problema 2 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 18$, calcular:

1. Pendiente de la tangente a la gráfica de la función, f, en el punto de abcisa $x = 1$.

2. Escribir los intervalos en donde la función f sea creciente y en donde sea decreciente.

3. Determinar los valores de x en los que la función f alcanza un máximo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función en estos puntos?.

Solución:

1. $$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Longrightarrow m = f'(1) = -12$$

2. $$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

3. En $x = -1$ tenemos el punto $(-1, 23)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

   En $x = 3$ tenemos el punto $(3, -9)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.

Problema 3 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = x^2 - x - 2$. Calcular el área del recinto limitado por $x = -1$, $x = 3$ y el eje OX.

Solución:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \; x = -1$$

En estos puntos la gráfica de la función cortaría al eje OX. Luego el área pedida vendrá determinado por

$$S = \left| \int_{-1}^{2} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} f(x)\, dx \right|$$

Como

$$\int f(x)\, dx = \int (x^2 - x - 2) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Tendremos:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{2} = -\frac{9}{2} u^2$$

$$\int_{2}^{3} f(x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{2}^{3} = \frac{11}{6} u^2$$

$$S = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3} u^2$$

Problema 4 *(1 puntos)*Divide un segmento de $5cm$ de longitud en dos partes, de manera que sea mínimo el resultado de sumar el cuadrado de una de ellas más cuatro veces la otra.

Solución:

Sin un trozo del segmento vale x, el otro vale $5-x$, luego

$$f(x) = 4(5-x) + x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ es un Mínimo}$$

La dos partes serán de $2cm$ y $3cm$, respectivamente.