Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \text{y el plano } \pi : x + y + z - 1 = 0.$$

1. Determinar las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta y cuya distancia al plano π sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto?. Contestar razonadamente.
2. Calcular la distancia de $Q(1, 1, 1)$ a r y a π.

Solución:

1. Un punto cualquiera de r es dela forma $P(2t, t, 0)$, tendremos

$$d(P, \pi) = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}}$$

$$d(P, O) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

Como estas dos distancias son iguales, $d(P, \pi) = d(P, O)$ tendremos:

$$\frac{|3t - 1|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5}$$

Como tenemos un valor absoluto, esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 - \sqrt{15}}$$

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{3}} = -t\sqrt{5} \Longrightarrow t = \frac{1}{3 + \sqrt{15}}$$

Sustituyendo en P tenemos los puntos

$$\left(\frac{2}{3 - \sqrt{15}}, \frac{1}{3 - \sqrt{15}}, 0 \right) \quad \left(\frac{2}{3 + \sqrt{15}}, \frac{1}{3 + \sqrt{15}}, 0 \right)$$

2. Tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular calcular $d(Q,r)$ consideramos los datos de la recta r : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,0)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right.$ construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rQ}=(1,1,1)$ y calculamos

$$\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right|=(-1,2,-1)$$

Tenemos por tanto

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas por

$$r_1:\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 2z=0\\ 2x- & 3y+ & z=1\end{array}\right.\quad r_2:\left\{\begin{array}{rrr} x= & & 3t\\ y= & 1- & 2t\\ z= & 2+ & t\end{array}\right.$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto de intersección de r_2 con el plano $\pi: x-3y-2z+7=0$

Solución:
El punto de intersección que buscamos será:

$$3t-3(1-2t)-2(2+t)+7=0\Longrightarrow t=0\Longrightarrow Q(0,1,2)$$

Los datos de r_1 serán los siguientes

$$\overrightarrow{u_{r_1}}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{array}\right|=(-5,-5,-5)$$

Si hacemos $x=0$ obtenemos el punto $P_{r_1}\left(0,-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(-5,-5,-5)\\ \overrightarrow{QP_{r_1}}=\left(0,-\frac{7}{5},-\frac{11}{5}\right)\\ Q(0,1,2)\end{array}\right.$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc} -5 & 0 & x\\ -5 & -\frac{7}{5} & y-1\\ -5 & -\frac{11}{5} & z-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow 4x-11y+7z-3=0$$

Problema 3 *(4 puntos)* Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \alpha + t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z-1}{-1}$$

1. Estudiar su posición relativa en función de α.
2. Si $\alpha = -1$, encontrar un plano paralelo a r y que contenga a s.

Solución:

1. Los datos que tenemos de r y s son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, \alpha, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, \alpha, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

Construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, \alpha, 1)$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\overline{A}| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan independientemente del valor de α.

2. Cuando $\alpha = -1$ tenemos

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

El plano π que buscamos vendrá definido por

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -1) \\ P_s(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y - z + 1 = 0$$