Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(3 puntos)* Encontrar la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y corta a las rectas r y s de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z+ & 1 = 0 \\ 2x- & y+ & z+ & 4 = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 3 + t \\ y = & t \\ z = & 1 + t \end{array} \right.$$

Determinar la posición que ocupan las dos rectas.

Solución:

Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -5, -7) \\ P_r(0, -5, -9) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ P_s(3, 0, 1) \end{array} \right.$$

Donde hemos calculado

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{lrr} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = (1, -5, -7)$$

Si hacemos $x = 0$ obtenemos $P_r(0, -5, -9)$.

Para determinar la posición que ocupan necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 5, 10)$ y tenemos que

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \end{array} \right), \quad A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |\overline{A}| = 54 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Ahora tenemos que calcular:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{PP_r} = (0, -5, -9) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PP_s} = (2, 0, 2) \\ P(1, 0, 1) \end{array} \right.$$

Obtenemos:

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & -1 & x - 1 \\ -5 & -5 & y \\ -7 & -8 & z + 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + 3y - 2z - 3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 2 = 0$$

La recta que buscamos será

$$t : \left\{ \begin{array}{llll} x & +3y- & 2z- & 3 = 0 \\ x & - & z- & 2 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(1,2,3)$, y al punto intersección de la recta r y el plano π cuyas ecuaciones son:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{array} \right. \qquad \pi : x + y + z = 0$$

Solución: El punto de intersección que buscamos será:

$$(1 + 2t) + (2 + 2t) + (1 - 2t) = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow S(-3, -2, 5)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1,2,3) - (1,2,1) = (0,0,2) \\ \overrightarrow{PS} = (-3,-2,5)_(1,2,1) = (-4,-4,2) \\ P(1,2,1) \end{array} \right.$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -4 & x-1 \\ 0 & -4 & y-2 \\ 2 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$$

Problema 3 *(4 puntos)* Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π de ecuaciones

$$r : \left\{ \begin{array}{llll} 2x- & y+ & & +2 = 0 \\ x+ & y+ & z & -1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi : x + y - z + 1 = 0$$

y calcular la proyección ortogonal de r sobre π.
Solución: Sean las matrices A y $\overline{A}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -6 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ la recta r y el plano π se cortan.

La proyección ortogonal de r sobre π será la recta t, que vendrá determinada por la recta intersección del plano π y otro plano π' perpendicular a él que contenga a la recta r, esto es

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,-2,3) \\ P_r(0,2,-1) \end{array} \right.$$

Donde

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 3)$$

Si $x = 0$ obtenemos que $P_r(0, 2, -1)$. Por tanto:

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 3 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 2y - z + 3 = 0$$

La recta t que buscamos tendrá de ecuación:

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z+ & 3=0 \\ x+ & y- & z+ & 1=0 \end{array} \right.$$