Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 2 *(2 puntos)* Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 3 *(3 puntos)* Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & 2y+ & 3z & -4 = 0 \\ \pi_2: & 2x+ & y+ & z & +1 = 0 \\ \pi_3: & -2x+ & 4y- & 6z & = 0 \end{array}$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & 3z & -4 = 0 \\ 2x+ & y+ & z & +1 = 0 \\ -2x+ & 4y- & 6z & = 0 \end{array} \right.$$

Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Pero podemos encontrar el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2$

Calculamos ahora el rango de $\overline{A}$, calculamos el determinante

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3.$

En conclusión $\text{Rango}A = 2 \neq \text{Rango}\overline{A} = 3$ y tendremos que compararlos dos a dos; comparamos π_1 y π_3:

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-4}{0}$$

Esto quiere decir que π_1 y π_3 son paralelos, y por tanto, π_2 corta a los dos.

Problema 4 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 2y+ & z = & -1 \end{array} \right.$$

estudiar su posición en el espacio y calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - 4k = (-1, -3, -4)$$

Para encontrar un punto de la recta s hacemos:

$$x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P_s(0, 0, -1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -3, -4) \\ P_s(0, 0, -1) \end{array} \right.$$

Tomamos el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -2, -2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que Rango$A = 2 \neq$Rango$\overline{A} = 3 \Longrightarrow$ Las dos rectas se cruzan.

El ángulo que forman las dos rectas vendrá dado por

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2-3-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+9+16}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$$\cos\alpha = 0,8498365855 \Longrightarrow \alpha = 31,80610002^{\text{o}}$$