Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato
(Ciencias de la Naturaleza)
Abril 2004

Problema 1 Considera la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$$

1. Determina sus asíntotas.
2. Calcula los intervalos en los que es creciente y decreciente, y sus extremos relativos.
3. De acuerdo con lo que has obtenido, dibuja aproximadamente su gráfica.
4. Fijándote en la gráfica anterior, explica cuál sería la gráfica de la función $g(x) = -f(x) + 3$ (haz un esquema). ¿En qué puntos tiene máximos la función $g(x)$.

Solución:

1. **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.
   - **Horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$$
   - **Oblicuas:** No hay, ya que hemos encontrado una asíntota horizontal.
2. **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - 2}{(2x^2 + 1)^2}; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1, \ x = \frac{1}{2}$$

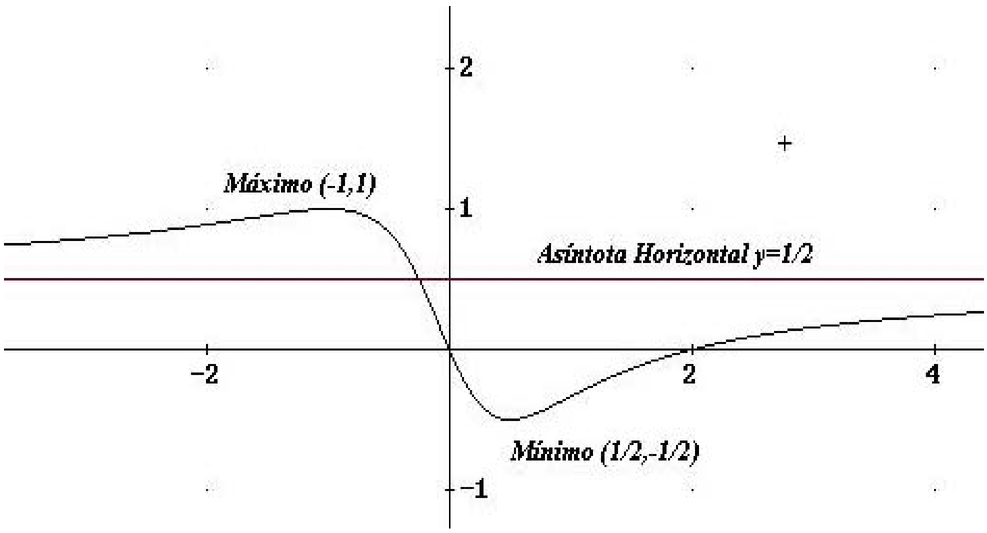
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

   Extremos Relativos:

   En $x = -1$ tenemos el punto $(-1, 1)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

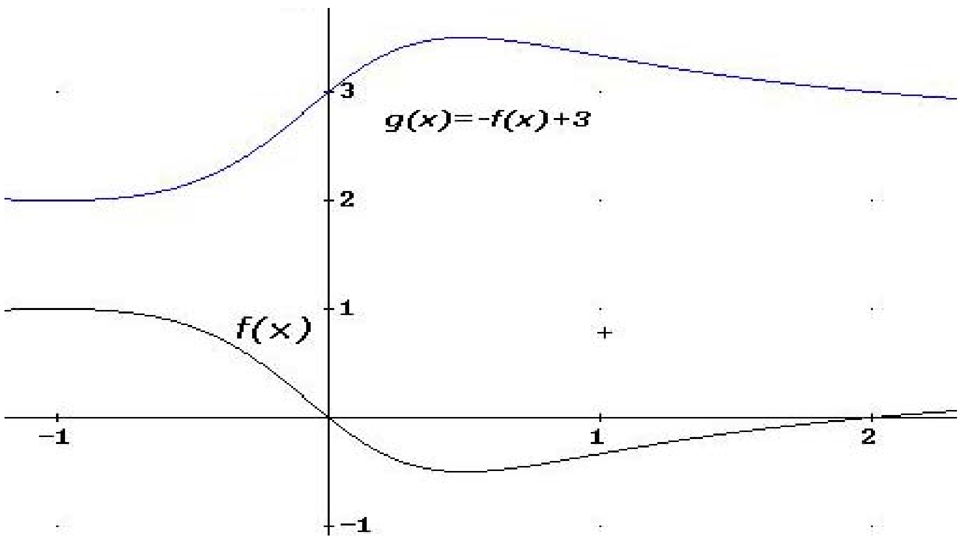
En $x=\frac{1}{2}$ tenemos el punto $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y en él, la función pasa de decrecer a crecer, luego es un Mínimo.

3. **La Representación gráfica:**



4. El máximo de $g(x)=-f(x)+3$ sería $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$, ya que $-\left(\frac{1}{2}\right)+3=\frac{7}{2}$.

   El mínimo de $g(x)$ será $(-1,2)$, ya que $-1+3=2$.



Problema 2 *(2 puntos)*Estudiar en la función $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$:

1. Su dominio de definición, asíntotas horizontales y verticales.
2. Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.
3. Sus intervalos de concavidad y convexidad.
4. Utilizando estos datos dibuja su gráfica.

Solución:

1. **Dominio:** Calculamos los puntos que anulan el denominador y tenemos que $x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = -3$

   Luego $Dom\, f = R - \{-3, -1\}$

   Asíntotas Verticales:

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

   Luego $x = -3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

   Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

   Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3} = 1$$

   Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

   Monotonía.

$$f'(x) = \frac{-2(x + 2)}{(x^2 + 4x + 3)^2};\ f'(x) = 0 \Longrightarrow x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
$-(x + 2)$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
	crece	decrece

   Extremos relativos: En $x = -2$ tenemos el punto $(-2, 0)$ y en él, la función pasa de crecer a decrecer, luego es un Máximo.

2. **Estudio de la Curvatura:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 12x + 13)}{(x^2 + 4x + 3)^3}$$

comprobamos que el numerador no se anula nunca $3x^2 + 12x + 13 \neq 0$, luego no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

3. **Dibujo de la gráfica**