Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Febrero 2003

Problema 1 *(4 puntos)*Discutir la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & x- & y+ & z= & 0 \\ \pi_2: & & ay+ & 2z= & 4 \\ \pi_3: & & 2y+ & az= & 4 \end{array}\right.$$

Solución

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para encontrar los valores que anulan el determinante de la matriz $A \Longrightarrow |A| = a^2-4=0 \Longrightarrow a=2,\ \ a=-2$.

Si $a \neq 2$ y $a\neq -2$ tendremos que $|A|=0$ por lo que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 =nº de incógnitas, y el sistema en este caso es Compatible Determinado. En conclusión, los tres planos se cortan en un sólo punto.

Si $a=2$ tendremos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos filas iguales, y además $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0$. Por lo que podemos concluir en este caso que Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 2 <nº incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado. Los planos π_2 y π_3 son coincidentes, y el plano π_1 los corta en una recta.

Si $a=-2$ tendremos:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Primero tenemos que $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{array}\right| = -2 \neq 0$, por lo que Rango$(A)=2$.

Como
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$
tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$

En este caso, por tanto, Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$. El sistema es Incompatible y para ver la posición de los planos los comparamos dos a dos. Vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos, y el plano π_1 los corta a los dos.

Problema 2 *(3 puntos)*Sea la recta
$$r : \left\{ \begin{array}{rrr} 2x & + & z = 1 \\ x & +y- & z = 0 \end{array} \right.$$

1. Calcular la ecuación de un plano que sea perpendicular a ella y contenga al punto $P(1, 1, 0)$.
2. Calcular la intersección de este plano y r.
3. Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

1. $$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$
$$\pi : -x + 3y + 2z + \lambda = 0$$
Como este plano tiene que contener al punto P, por simple sustitución tenemos: $-1 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$.
$$\pi : -x + 3y + 2z - 2 = 0 \Longrightarrow x - 3y - 2z + 2 = 0$$

2. Pongo r en paramétricas:
$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right.$$
y sustituyo en π, $\lambda - 3(1 - 3\lambda) - 2(1 - 2\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3}{14}$

Sustituyendo este valor en r tenemos el punto $P'\left(\dfrac{3}{14}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{8}{14}\right)$

3.

$$P' = \frac{P'' + P}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{14} = \dfrac{x+1}{2} \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{7} \\ \dfrac{5}{14} = \dfrac{y+1}{2} \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{8}{14} = \dfrac{z}{2} \Longrightarrow z = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

El punto buscado es $P''\left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$.

Problema 3 *(3 puntos)*Determinar la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x \quad + \quad z = 1 \\ x \quad +y- \quad z = 0 \end{cases}, \quad s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Solución:

El vector director de la recta r será:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$

Un punto de la recta será (haciendo $x = 0$) $A_r(0, 1, 1)$, y tendremos:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 2) \\ A_r(0, 1, 1) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ A_s(1, 1, 0) \end{cases}$$

Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{A_r A_s} = (1, 0, -1)$

$$|A| = |\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_r A_s}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego las dos rectas se cruzan.