Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Septiembre 2003-Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.
2. (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

1. $x =$ precio de un billete con destino nacional.

   $y =$ precio de un billete con europeo comunitario.

   $z =$ precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 10x+ & 10y & +10z = & 12000 \\ 10x+ & & 20z = & 13000 \\ 10x+ & 10y & = & 7000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & z = & 1200 \\ x+ & & 2z = & 1300 \\ x+ & y & = & 700 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 300 \\ y = 400 \\ z = 500 \end{array}\right.$$

2. Si el precio de los billetes nacionales bajan un 20 por ciento costarían $0,8 \cdot x = 240$ euros, por lo que hay que subir el precio de los billetes europeos comunitarios en $300 - 240 = 60$ euros, lo que significa que el nuevo precio sería de $400 + 60 = 460$ euros, lo que supone una subida de estos billetes del 15 por ciento. $(400(1 + t) = 460 \Longrightarrow t = 0,15)$

Problema 2 *(2 puntos)*

1. Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

2. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B = AB$.

Solución:

1. $A+B = AB \Longrightarrow A+B-AB = 0 \Longrightarrow A-AB = -B \Longrightarrow$

$A(I-B) = -B \Longrightarrow -A(I-B)(I-B)^{-1} = B(I-B)^{-1} \Longrightarrow$

$B(I-B)^{-1} = -A \Longrightarrow B^{-1}B(I-B)^{-1} = -B^{-1}A \Longrightarrow$

$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$

2. LLamamos $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}$, y tendremos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z & -y+h \\ 2x-z & 2y-h \end{pmatrix}$$

Tenemos:
$$\left\{\begin{array}{l} x-1 = -x+z \\ 2+z = 2x-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -1 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} y+1 = -y+h \\ -1+h = 2y-h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h = 0 \\ y = -1/2 \end{array}\right.$$

Luego
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)*Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$.

1. Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

2. Dibujar su gráfica.

3. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

Solución:

1. $$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x \geq 0 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

   $$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4} (-2x(4-x)) = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4} (2x(4-x)) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

   Luego la función es continua en $x = 4$, y por tanto, en todo R.

   $$f'(x) = \begin{cases} 8-4x & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -8+4x & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(4^-) = -8 \\ f'(4^+) = 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

   $$f'(4^-) \neq f'(4^+)$$

   Luego la función no es derivable en $x = 4$, pero si es derivable en $R - \{4\}$.

2. Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

   $f(x) = 8x - 2x^2$ si $x \in (-\infty, 4]$

   $f'(x) = 8 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$

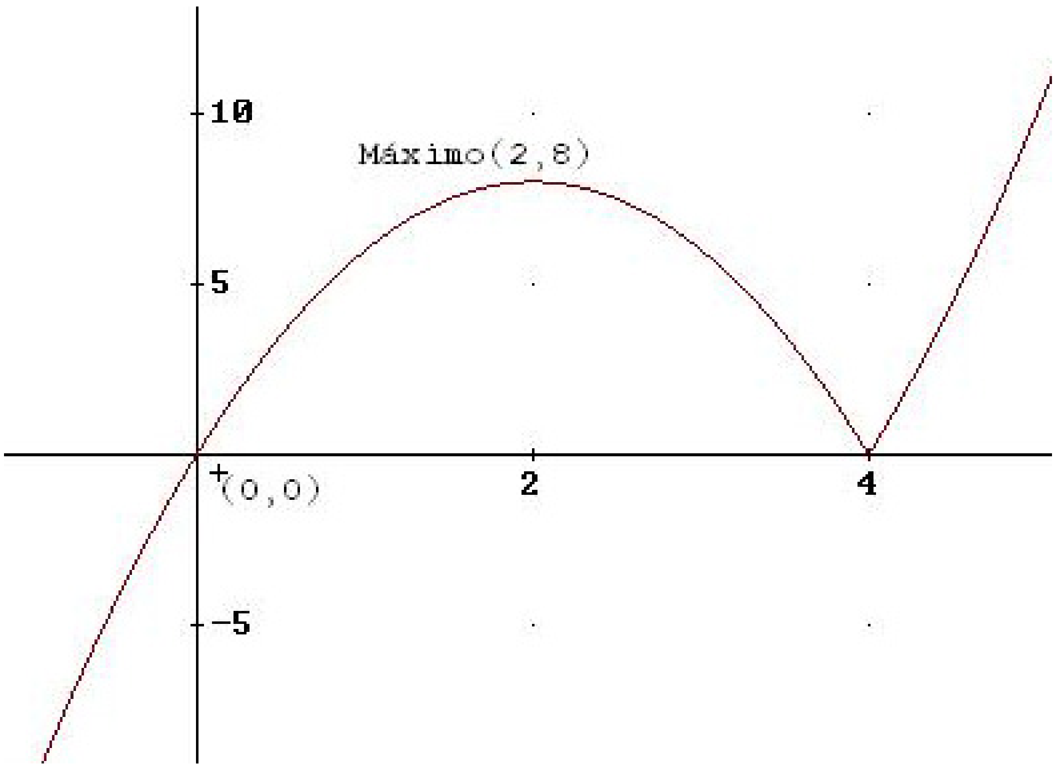
   $f''(2) = -4 \Longrightarrow (2, 8)$ es un máximo.

   Si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

   $f(x) = -8x + 2x^2$ si $x \in (4, +\infty)$

   $f'(x) = -8 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$, que no está en el intervalo $(4, +\infty)$.

   En este intevalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$.
   Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



3. A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\text{Área} = \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx =$$

$$= \int_0^4 (8x-2x^2)dx + \int_4^5 (-8x+2x^2)dx = 26\,u^2$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

2. (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

1. Como Q es el punto de corte de π y r, ponemos la recta en paramétricas y sustituimos en el plano:

$$r = \begin{cases} x = & 1+ & \lambda \\ y = & & 2\lambda \\ z = & -1+ & 2\lambda \end{cases}$$

   Sustituyendo en el plano

$$1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

   El punto será $Q(1, 0 - 1)$.

2. Como π' es paralelo a π tendrá de ecuación $\pi' = x + y + z + m = 0$.

   Para calcular el punto de corte del plano π' y la recta r, sustituimos en el plano π' los valores que teníamos de r en forma paramétrica:

$$1 + \lambda + 2\lambda - 1 + 2\lambda + m = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{m}{5}$$

   Sustituyendo en r obtenemos el punto $Q'\left(1 - \frac{m}{5}, -\frac{2m}{5}, -1 - \frac{2m}{5}\right)$.

   Como $d(Q, Q') = 2$ tenemos:

$$d(Q, Q') = \sqrt{\left(1 - \frac{m}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2m}{5} - 0\right)^2 + \left(-1 - \frac{2m}{5} + 1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{25} + \frac{4m^2}{25} + \frac{4m^2}{25}} = \frac{m}{5}\sqrt{9} = \frac{3m}{5} = 2 \Longrightarrow m = \frac{10}{3}$$

   Luego la ecuación del plano es

$$\pi' : x + y + z + \frac{10}{3} = 0 \Longrightarrow 3x + 3y + 3z + 10 = 0$$

   .