Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato

Septiembre 2003-Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, -1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

2. (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 3k = (-1, 2, 3)$$

Si en la recta s hacemos $x = 0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y = -2$ y $z = 1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0, -2, 1)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, k) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 3) \\ P_s(0, -2, 1) \end{array} \right.$$

El plano π que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,3) \\ P_r(1,-1,k) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - 2y + z - 1 - k = 0 \Longrightarrow x + 2y - z + 1 + k = 0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0,-2,1)$ sustituimos en el plano

$$0 - 4 - 1 + 1 + k = 0 \Longrightarrow k = 4$$

2. El plano buscado es:

$$x + 2y - z + 5 = 0$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ mx+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.
2. (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{cases} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ mx+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 3$ =n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

2. Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ x+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array}\right.$$

Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango$(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, Rango$\overline{A} = 2$.

En conclusión, si $m = 1$ Rango(A) =Rango$\overline{A} = 2$ <nº de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x = & -1-t \\ y = & 3 \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

1. (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

3. (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

Luego $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = -\frac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.

Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximo en los puntos $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2. Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte:

   Si $x = 0$ tenemos que $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Si $f(x) = 0$ tenemos que

   $$\frac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = \pi, \quad x = -\pi$$

   Luego tenemos los puntos $(\pi, 0)$ y $(-\pi, 0)$.

   Con estos datos y los del apartado anterior son suficientes para dibujar la gráfica de esta función, teniendo en cuenta que la función es impar.

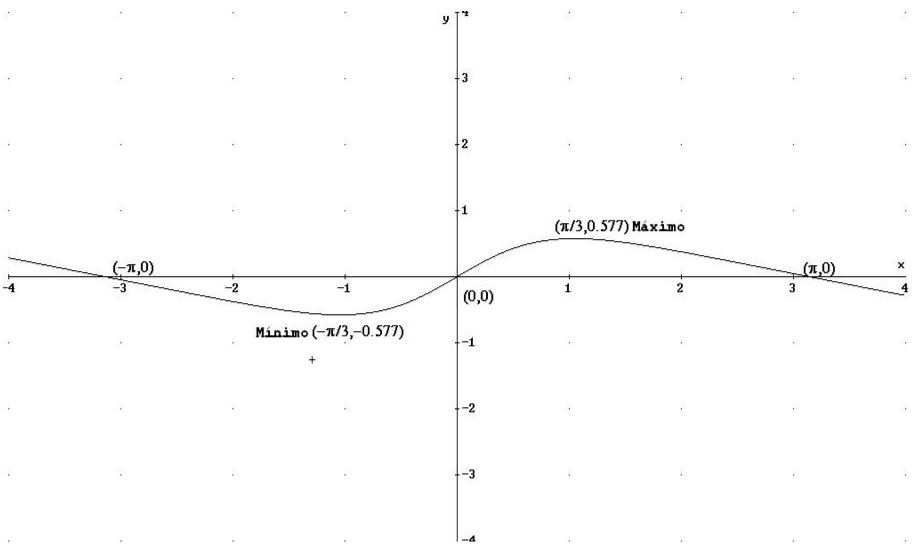
3. Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

   $$t = 2 - \cos x \Longrightarrow \sin x = dt$$

   $$\int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|2 - \cos x| + C$$

   Luego la integral pedida valdrá:

   $$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx = \ln|2 - \cos x|]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$



Problema 5 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

2. (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,2) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = & 1+t \\ y = & 2t \\ z = & -1+2t \end{cases}$$

$$1 + t + 2t - 1 + 2t = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow Q(1,0,-1)$$

2. Calculamos una esfera de centro Q y radio 2: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 = 4$; esta esfera corta a la recta r en dos puntos Q' y Q'':

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 4 \Longrightarrow t = \pm\frac{2}{3}$$

Si $t = \frac{2}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π':

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{8}{3} = 0$$

Si $t = -\frac{2}{3} \Longrightarrow Q''\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π'':

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{7}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{10}{3} = 0$$