

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato
Junio 2003-Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Calcular los siguientes límites (donde "ln significa logaritmo neperiano).

1. (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1. (1 punto)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3 \sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x) \cos(2x)}{-2 \sin(2x) \cos(3x)} \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x) \cos(2x) - 2 \sin(3x) \sin(2x)}{2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

2. (1 punto)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x - (4-x)}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Problema 2 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

- (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
- (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

- Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \implies x = 1, x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

- Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 3 (3 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
- (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m .

Solución:

- Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} 3x + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ & mx- & y+ & z = 2 \\ & x+ & my- & z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

$$-m(m+1) = 0 \implies \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}A = \text{Rango}\bar{A} = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m = 0 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = -1 \implies |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que $\text{Rango}(A) = 2$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

En conclusión, cuando $m = -1 \implies \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\bar{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 4 (3 puntos) Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.
- (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3, -4, 1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

2.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 2) \\ \vec{u} = (-3, -4, 1) \\ P_s(-1, -2, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{cases}$$